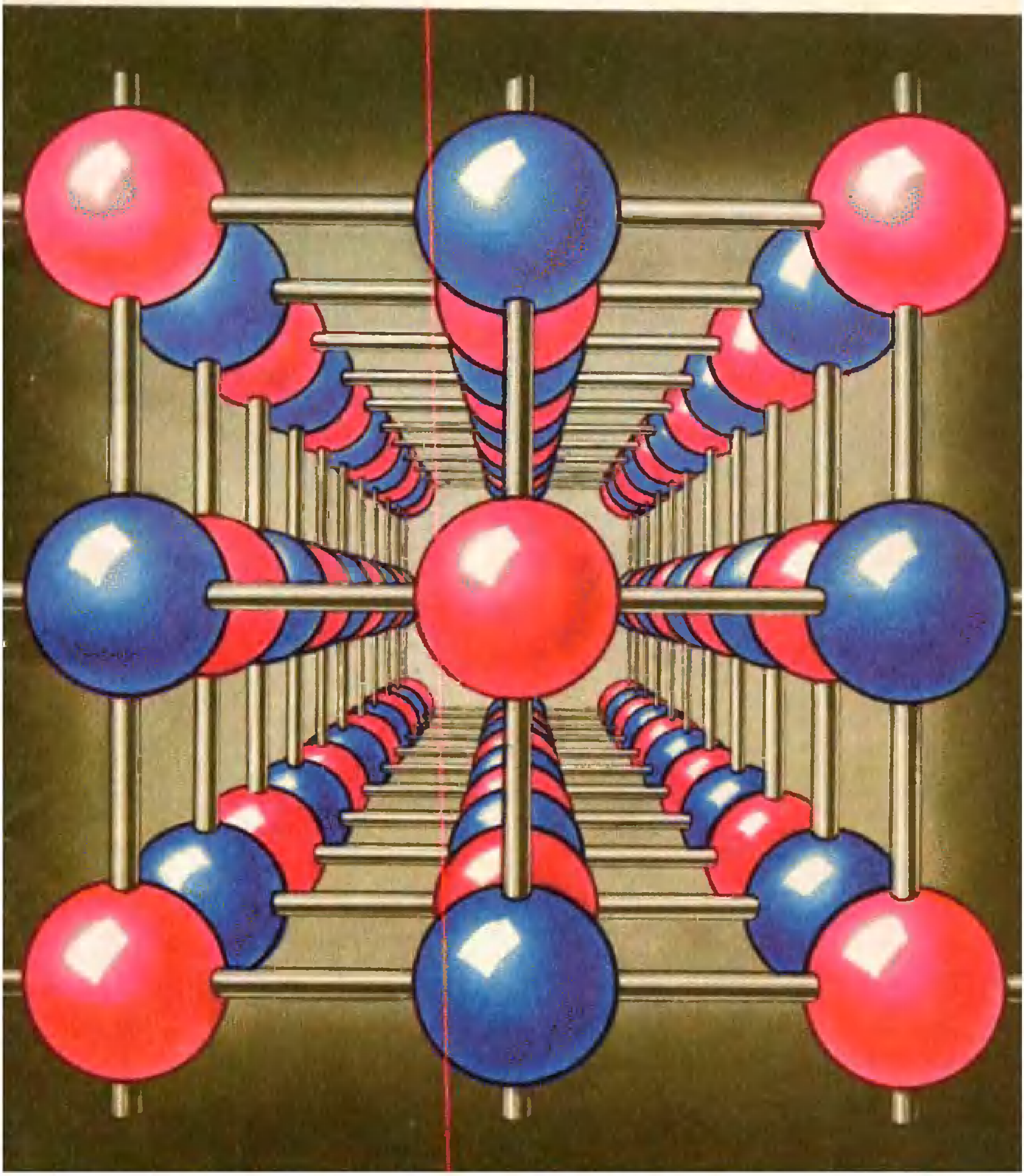
Квант

1973
10

Научно-популярный физико-математический журнал



На рисунке сверху изображена замысловатая фигура, лежащая на листе клетчатой бумаги. На ее «территорию» попало девять узлов (узлами мы назвали точки пересечения горизонтальных и вертикальных прямых, линующих бумагу). А нельзя ли сдвинуть ее по бумаге так, чтобы в занимаемую ее площадь попало меньше узлов? Оказывается можно: если площадь произвольной фигуры, лежащей на клетчатой бумаге, меньше n (площадь одного квадрата принята за единицу), то ее можно сдвинуть так, что на ее территорию попадает не больше (n—1) узлов. Это утверждение называется теоремой Блихфельда. Постарайтесь ее доказать. После этого вам останется убедиться, что площадь нашей фигуры меньше единицы, и, значит, ее можно вообще сдвинуть с узлов.

На первой странице обложки вы видите модель идеального ионного кристалла. Свойства кристаллических веществ определяются строением их кристаллической решетки. О том, как по микроскопическим характеристикам найти механические параметры вещества рассказывается в статье Г. Б. Купермана и Е. Д. Щукина «Механические свойства кристаллов».

Основан в 1970 году

Квант

1973
10

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

Эварист Галуа
(1811—1832)

Н. Я. Виленкин, В. П. Лишевский

ЭВАРИСТ ГАЛУА

«У меня нет времени... У меня нет времени!» Эти слова, нацарапанные майской ночью 1832 года почти неразборчивыми каракулями на листке, сплошь исписанном алгебраическими формулами, кричат о самой удивительной и трагической судьбе, которая когда-либо выпадала на долю ученого, — о судьбе Эвариста Галуа. Непризнанный гений, отверженный ученый, одинокий и непримиримо честный. В ночь перед дуэлью двадцатилетний юноша писал в последний раз, писал, прощаясь с друзьями, с наукой, с жизнью.

Эварист Галуа родился 26 октября 1811 года в городке Бур-ля-Рен в семье директора пансиона. Его мать Аделанда-Мари, дочь доктора прав Парижского университета, дала своему сыну хорошее гуманитарное образование. Его любимые авторы — Плутарх и Тит Ливий, Корнель и Расин — учили, что нет большего счастья, чем отдать жизнь за свободу своей родины.

В двенадцать лет Эварист поступил в Парижский лицей Людовика Великого. Там он стал одним из лучших — похвальные листы и призы за латинские стихи и переводы с греческого сыпались на него один за другим. Однако Эварист довольно быстро охладевает к литературе и истории и остается на второй год в классе риторики. Его работу оценили как посредственную, поведение — как рассеянное, ум — как слишком юный. Галуа воспользовался своим возвращением на повторный курс для того, чтобы одновременно учиться и в математическом классе. Там сразу обнаружились его исключительные математические способности. Элементарные книги по алгебре не удовлетворяли юношу: в них отсутствовал дух научного исследования. Зато учебник геометрии Лежандра он прочитывает, не отрываясь, как роман, и, когда кончает чтение, весь длинный ряд теорем прочно остается в его памяти.

Настоящее умственное наслаждение дает ему чтение работ Лагранжа, одного из крупнейших математиков XVIII века. С поразительной легкостью Галуа овладевает математическим анализом. Но больше всего его заинтересовала работа Лагранжа, в которой великий аналитик исследовал проблему разрешимости в радикалах алгебраических уравнений.

Еще в XVI веке итальянские математики Тарталья и Кардано вывели формулы для решения уравнений третьей степени, а Феррари, юный ученик Кардано, — формулы для решения уравнений четвертой степени. Но дальше дело застопорилось: никому не удавалось вывести формулу для решения уравнений пятой степени. В том, что такая формула существует, математики в то время не сомневались. Всем казалось, что дело лишь в том, чтобы найти эту формулу, составить волшебную комбинацию из коэффициентов уравнения, знаков арифметических действий и радикалов, по которой можно будет решить любое уравнение пятой степени. Но проходили столетия, а такую комбинацию никому не удавалось составить, хотя многие посвятили этому всю жизнь.

Лагранж отличался своеобразным складом ума. В каждом вопросе он стремился создать широкие теоретические концепции, связывающие в единное целое все множество отдельных задач, предложений и приемов. Этот же подход применил он и к вопросу о решении уравнений в радикалах. Он не стал составлять различные комбинации, а постарался понять, в чем была причина успешности приемов, примененных Кардано, Феррари, Эйлером, Чиргаузеном и многими другими для решения уравнений 3-й и 4-й степеней.

Оказалось, что все они делали одно и то же — составляли выражения из корней уравнения, которые при перестановках корней принимали относительно мало различных значений. Например, если взять рациональное выражение, составленное из 4 корней x_1, x_2, x_3, x_4 уравнения 4-й степени, то при различных перестановках корней оно примет, вообще говоря, 24 различных значения (потому что 4 объекта можно переставлять 24 способами).

Одночлен x_1 примет при таких перестановках 4 значения: x_1, x_2, x_3, x_4, то есть столько же, какова степень уравнения; произведение

$$(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\times\times(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_3-x_4)$$

при этих перестановках принимает лишь 2 различных значения; двучлен $x_1x_2+x_3x_4$ — только 3 различных значения. Лагранж доказал, что если $x_1, \ldots, x_n$ — корни уравнения n-й степени, то число перестановок k, не меняющих вида некоторого рационального выражения $f(x_1, \ldots, x_n)$, является делителем числа $n!$ ($n! = 1\cdot2\cdot\ldots\cdot n$), а само это выражение удовлетворяет уравнению $n!/k$-й степени, коэффициенты которого могут быть выражены через коэффициенты заданного уравнения.

Анализируя всевозможные выражения, составляемые из корней данного уравнения, и перестановки, оставляющие эти выражения неизменными, Лагранж доказал, что если p — простое число, то решение любого уравнения p-й степени сводится указанным путем к решению уравнения степени $(p-2)!$. При $p=3$ имеем $(p-2)!=1$, уравнения первой степени решаются. Если же $p = 5$, то $(p-2)! = 3! = 6$, то есть решение уравнения пятой степени сводится к решению уравнения шестой степени. «Отсюда следует, — писал Лагранж, — что весьма сомнительно, чтобы методы, которые мы рассмотрели, могли дать полное решение уравнения пятой степени». Главное же в работе Лагранжа было то, что он установил связь между решением уравнения в радикалах и перестановками корней. Эту связь он назвал «истинной философией решения уравнений».

Работы Лагранжа открыли перед Галуа новый мир. Все его помыслы отныне направлены на математику. Забыты история, литература, риторика; преподаватели этих наук пишут, что «его способности — это не более чем легенда, которой пора перестать верить...». Даже учитель математики Вернье, который был весьма высокого мнения о дарованиях Галуа, считает поведение Эвариста очень плохим, а его самого — скрытным и самолюбивым. Он видит, что юношей владеет страсть к математике, но пытается уговорить его заниматься и математикой, и риторикой. Поздно! Галуа уже вступил на путь самостоятельной научной работы. В шестнадцать лет он совершает ту же ошибку, которую за несколько лет до него сделал другой гениальный юноша — норвежец Нильс Абель, — он думает, что решил уравнение пятой степени. Какое значение имеет то, что Вернье дал ему лишь седьмую награду. Галуа уже не думает о лицее — он стремится в знаменитую Политехническую школу, где преподают ученики Лагранжа. Он верит, что в ней его оценят...

Однако попытка поступить в Политехническую школу окончилась про-

валом: знания работ Лежандра и Лагранжа оказалось недостаточно для того, чтобы решать изощренные задачи, предлагавшиеся экзаменаторами. Галуа вновь возвращается в опостылевший лицей. И здесь ему впервые улыбается счастье — он встречает учителя, который смог оценить его гениальность.

Ришар умел подниматься выше официальных программ, он был в курсе успехов наук и стремился расширить кругозор своих учеников. Отзывы Ришара о Галуа просты: «Он работает лишь в высших областях математики».

И действительно, уже в семнадцать лет Галуа получает первые научные результаты. Одна его заметка посылается в известный математический журнал и вскоре выходит в свет. И хотя заметка называется «Доказательство одной теоремы о периодических непрерывных дробях», она всецело посвящена теории уравнений — Галуа исследует, как связаны друг с другом разложения двух корней уравнения в непрерывные дроби.

Эта заметка — лишь первая проба пера. В семнадцать лет Галуа сделал гораздо более важные открытия в теории уравнений и направил работу в Академию наук. Представить его работу взялся самый знаменитый из французских математиков того времени — Коши, но академик был слишком занят, и работа юного лицеиста попросту затерялась.

Продолжать эти исследования у Галуа уже не было времени: надо было готовиться к повторной попытке поступить в Политехническую школу. На этот раз ни у Эвариста, ни у его учителя Ришара сомнений в успехе не было — экзамены должен был держать не самонадеянный школьник, а глубокий знаток математики, автор научных работ.

И снова Эварист стоит перед экзаменаторами. Каштановые волосы, близоруко прищуренные глаза. Взволнованный и бледный, он выглядит моложе своих семнадцати с половиной лет. Руки нервно крошат мел. «Расскажите, что Вы знаете о логарифмах». И вмиг застенчивость Эвариста сменяется гневом: «Я не школьник! Не буду отвечать на такой простой вопрос!». Тогда Галуа предложили решить труднейшее уравнение. В несколько минут он набросал оригинальное решение. Не поняв написанного, экзаменатор засмеялся. После короткого спора выведенный из себя Эварист бросил в экзаменатора тряпку для стирания мела. Это был не только жест гнева, но и жест отчаяния: Галуа понял, что то, о чем он страстно мечтал, ускользает от него навсегда.

«Почему экзаменаторы задают кандидатам только запутанные вопросы? — записывает он. — Может показаться, что они боятся быть понятыми теми, кого спрашивают. Откуда взялась эта злосчастная манера нагромождать в вопросах искусственные трудности? Неужели кто-нибудь думает, что наука слишком проста? А что из этого получается? Ученик заботится не о том, чтобы получить образование, а о том, чтобы выдержать экзамены... Можно с полным правом сказать, что несколько лет назад появилась новая наука, приобретающая с каждым днем все большее и большее значение. Она состоит в изучении пристрастий господ экзаменаторов, их настроений, что они предпочитают в науке и к чему питают отвращение».

А через несколько дней после неудачных экзаменов на Эвариста свалилась новая, неизмеримо бо̀льшая беда. Второго июля его отец Николя-Габриэль Галуа, затравленный политическими противниками, клерикалами и иезуитами, покончил с собой.

Эварист провожает прах своего отца. За гробом идут сотни жителей Бур-ля-Рена. Они отдают последние почести своему мэру, который бессменно руководил городом в течение семнадцати лет. Гроб вносят в церковь. Многие остаются на улице. Они не хотят войти в храм, служитель которого — виновник трагедии. Священника не видно, панихиду служит викарий. Приходский священник встречает процессию на кладбище. В толпе раздаются возмущенные крики: «Убийца!» В кюре летят камни.

В душе Эвариста смерть и похороны отца оставили глубокий след.

В феврале 1830 года восемнадцатилетний Эварист Галуа был зачислен в Приготовительную школу — ничтожную и бледную тень прежней Нормальной школы, упраздненной Бурбонами в 1826 году. Поступить туда ему было легко — ведь эта школа была как бы продолжением лицея Людовика Великого. В ней готовились кандидаты на звание преподавателя.

В Приготовительной школе Эварист сдает испытания на степень бакалавра литературы и математики. Лишь после второй попытки он был удостоен этого звания, плохо выдержав испытания по литературе, но очень хорошо — по математике и физике. Во время обучения Галуа публикует еще три научные работы, которые в январе 1830 года представляет на конкурс в Академию наук. Теперь его судьба в руках бессменного секретаря Академии — Фурье. Фурье начинает читать рукопись, но вскоре умирает. Вторая рукопись, как и первая, исчезает.

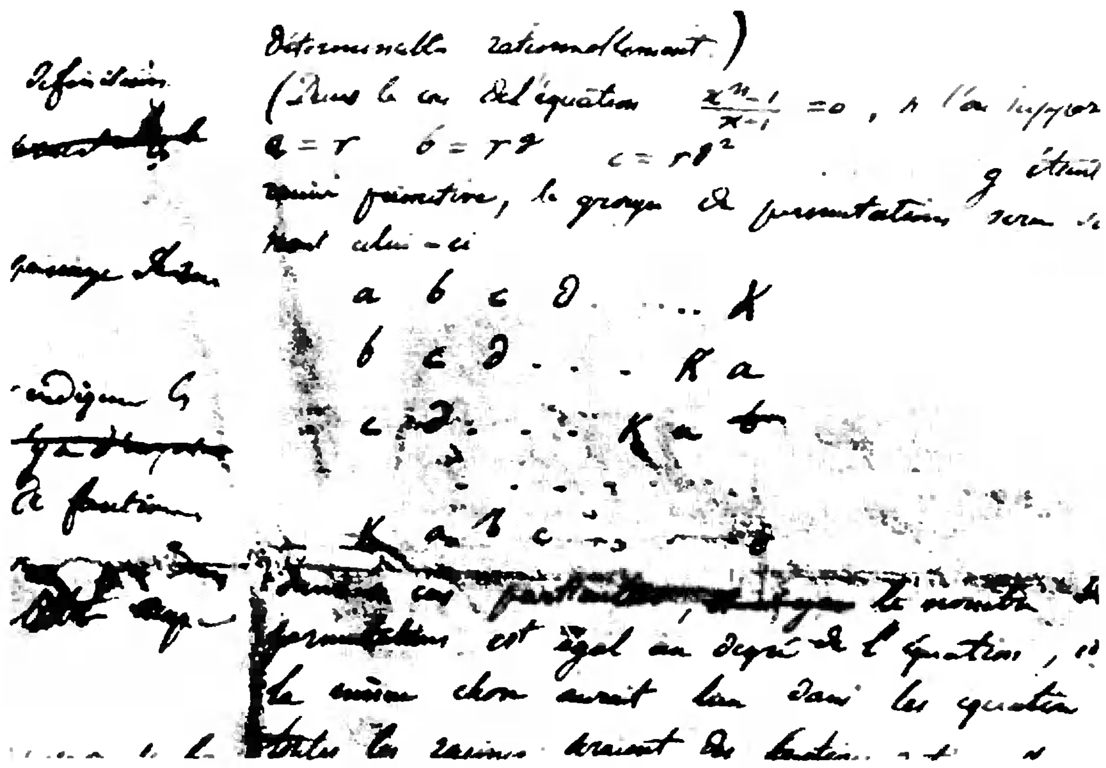
Летом 1830 года, когда Галуа заканчивал первый год обучения в Приготовительной школе, Июльская революция лишает власти короля Карла X. На баррикадах в первых рядах сражаются студенты Политехнической школы, той самой, куда так стремился попасть Галуа.

Приготовительной школой в то время руководил некто Гиньо. Пытаясь помешать своим студентам принять участие в развертывающихся событиях, он взял с них слово не покидать школу и распорядился запереть двери. Лишь два ученика отказались дать слово, требуемое директором, — Галуа и его кузен Бенар.

В ночь с 28 на 29 июля Галуа пытается вырваться на волю и присоединиться к восставшему народу. За это Гиньо подвергает нарушителя домашнему аресту. Галуа полон гнева и презрения к Гиньо, да и возведение на престол Луи-Филиппа вместо установления республики является в его глазах изменой идеалам, за которые сражались бойцы баррикад.

Во время каникул 1830 года Галуа активно участвует в работе революционных кружков, вступает в Общество друзей народа. После начала занятий в Нормальной школе (революция вернула ей прежнее название) юноша начинает борьбу со всесильным директором. В конце ноября Гиньо запрещает мятежному Галуа покидать школу.

Но Эварист не сдается. Он находит возможность нанести ответный удар. В декабрьском номере «Ля газетт дез эколь» за подписью «Ученик Нормальной школы» было помещено резкое письмо. Автор не ограничился критикой системы преподавания в



Факсимиле рукописи Э. Галуа.

школе. Он рассказал о политической беспринципности ее директора, описал издевательства, которым подвергаются «строптивые»... Для Гиньо было ясно, кто автор письма. Через четыре дня после его опубликования Эвариста исключают из школы.

Галуа оказался лишенным не только права посещать лекции, но и средств к существованию. Верный себе, Эварист не предается горестным размышлениям. Он действует. 9 января 1831 года в той же газете «Ля газетт дез эколь» появляется объявление: «В четверг 18 января г-н Галуа откроет публичный курс высшей алгебры у Кайо, книготорговца, улица Сорбонны, дом 5. Этот курс будет читаться во все четверги в час с четвертью; он предназначен молодым людям, которые, чувствуя, насколько неполно изучение алгебры в коллежах, желают углубиться в эту науку. Курс состоит из теорий, частично новых, которые никогда еще не изучались в публичных курсах. Мы ограничимся тем, что назовем новую теорию мнимых, теорию уравнений, разрешимых в радикалах, теорию чисел и эллиптических функций, трактуемых чисто алгебраически». Это была неслыханная дерзость: исключенный ученик восставал против своих учителей, девятнадцатилетний юноша бросал вызов официальной Сорбонне.

Как утверждают свидетели, на первую лекцию пришло тридцать слушателей, на второй их было не более десяти, а на третьей (и последней) — четыре человека. Галуа читал слишком сложно.

Из приведенного объявления видно, что в это время Галуа уже владел идеями, обессмертившими его имя, — лекции посвящались разрешимости уравнений в радикалах. Над разрешимостью уравнений Эварист начал думать еще со школьной скамьи. Теперь он уже знал, что ошибся, общее уравнение пятой степени нельзя решить в радикалах (доказательство этой теоремы было опубликовано Абелем в 1826 году *)). Но ведь доказательство Абеля, равно как и исследования Лагранжа, относились к общим уравнениям, к уравнениям с буквенными коэффициентами. А что будет, если рассматривать лишь уравнения с числовыми коэффициентами? Ведь может же случиться, что, хотя общей формулы для решения таких уравнений нет, корни каждого отдельного уравнения можно выразить в радикалах. А если это не так?.. Тогда должен быть какой-то признак, позволяющий определить, решается данное уравнение в радикалах или нет. Что же это за признак?

Нет сомнений, что путеводной звездой для Галуа, кроме работы Лагранжа, служила работа Гаусса (написанная им в семнадцать лет) о построении правильных многоугольников **). В этой работе Гаусс исследовал, при каких n уравнение

$$x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1 = 0 \quad (1)$$

можно решить в квадратных радикалах, используя, кроме арифметических действий, лишь извлечение квадратных корней. Но было ясно, что если допустить возможность извлечения корней любой степени, то уравнение (1) решается в радикалах.

Чем же отличается уравнение (1) от уравнений общего вида?

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \quad (2)$$

Тем, что между корнями имеются зависимости, которых нет для корней уравнения (2). Ведь в общем случае между корнями $x_1, \ldots, x_n$ уравнения (2) есть только найденные еще в XVI веке французским математиком Виета зависимости

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -a_1, \\ &x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = a_2, \quad (3) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n a_n \end{aligned}$$

и те соотношения, которые можно вывести из них с помощью арифметических операций. А корни уравнения (1) имеют вид *)

$$x_k = \cos\frac{2\pi k}{n+1} + i\sin\frac{2\pi k}{n+1},$$

$k = 1, 2, \ldots, n$, и из формулы Муавра видно, что

$$x_1^k = \left(\cos\frac{2\pi}{n+1} + i\sin\frac{2\pi}{n+1}\right)^k = \cos\frac{2\pi k}{n+1} + i\sin\frac{2\pi k}{n+1} = x_k,$$

то есть

$$x_1 = x_1,\ x_2 = x_1^2,\ x_3 = x_1^3,\ x_4 = x_1^4, \ldots$$

А на соотношениях вида $x_k = x_1^k$ и вытекающих из них следствиях построено все доказательство Гаусса. Но отдельные следствия из этих соотношений отличаются от них лишь номерами корней. Например, при $n = 4$ из соотношений $x_k = x_1^k$ вытекают и такие:

$$x_2 = x_2,\ x_4 = x_2^2,\ x_1 = x_2^3,\ x_3 = x_2^4.$$

Чтобы получить их из соотношений $x_k = x_1^k$, достаточно поменять номера корней по такому закону:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Эта запись означает, что x_1 переходит в x_2 (то есть x_1 заменяется на x_2), x_2 — в x_4 и т. д. Далее, корни можно переставить еще раз. При этом x_1 сначала переходит в x_2, а потом x_2 — в x_4. Окончательно, x_1 переходит в x_4. Если проследить за всеми корнями, то окажется, что при повторном применении перестановки (4) получа-

---

*) Короткое сообщение появилось еще в 1824 году.

**) О ней смотрите статью: Гиндикин С. Г. Дебют Гаусса. «Квант», 1972, № 1.

*) В самом деле, это уравнение можно записать в таком виде:

$$\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = 0.$$

А по формуле Муавра

$$\left(\cos\frac{2\pi k}{n+1} + i\sin\frac{2\pi k}{n+1}\right)^{n+1} - 1 = \cos 2\pi k + i\sin 2\pi k - 1 = 0.$$

ется перестановка

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Так получаются 4 различные перестановки корней, в том числе и тождественная перестановка

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix},$$

при которой все корни остаются на месте. Эти перестановки, и только они, переводят соотношения $x_k = x_1^k$ в другие соотношения, выполняющиеся для корней уравнения (1) при $n = 4$. И любопытно вот что. Если сделать сначала одну такую перестановку, а потом другую, то в результате получится перестановка, которая тоже переводит верные соотношения в верные. Эти перестановки можно умножать подобно числам.

А нет ли таких перестановок и для других уравнений? Ведь и для них можно составлять соотношения между корнями и смотреть, при каких перестановках верные соотношения будут переходить в верные. Конечно, самые лучшие — это те уравнения, корни которых — рациональные числа. Такие уравнения решаются без извлечения корней. Для таких уравнений есть очень простые соотношения между корнями $x_1 = b_1, \ldots, x_n = b_n$, и единственной «перестановкой», сохраняющей эти соотношения, является тождественная перестановка. Значит, уравнение тем проще, чем меньше совокупность перестановок, сохраняющих соотношения между корнями! Следует как-то назвать такие совокупности перестановок. Эти перестановки собираются вместе, группируются. Не назвать ли их совокупность *группой*?

Вряд ли, применив это название, Эварист думал, что он вводит в математику новое понятие, которому суждена долгая и славная жизнь, что число работ, посвященных группам, будет исчисляться многими тысячами, что методы теории групп откроют тайны кристаллических решеток, атома и многое другое. Он хотел лишь посмотреть, что происходит с группами перестановок корней в процессе решения уравнений.

Конечно, Галуа не был первым, кто имел дело с группами перестановок корней. Ими занимались уже и Лагранж, и Гаусс. Сам Галуа понимал, что идеи, высказанные им, в неявной форме содержались в работах его предшественников.

Но велика заслуга того, кто разъяснил такие идеи, сформулировал существенные свойства понятий, применил их к решению новых и трудных задач. Это и сделал Галуа для понятия группы — лишь после его работ оно стало предметом изучения математиков.

Однако вернемся к ходу рассуждений Галуа. Теперь надо внимательнее посмотреть, какие соотношения могут быть между корнями уравнения. Это зависит от того, какие коэффициенты считать допустимыми в таких соотношениях. Возьмем уравнение

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

Если в соотношениях допустимы лишь рациональные коэффициенты, то для его корней есть только соотношения Виета, соотношения вида $x_k = x_1^k$ и те, которые из них получаются с помощью рациональных операций. Но если допустить коэффициенты более сложного вида, то появятся и новые соотношения.

Чем шире множество коэффициентов, тем больше соотношений между корнями. А тогда перестановки, сохранявшие верными все старые соотношения, могут уже оказаться непригодными: они могут нарушать новые соотношения. Значит, с расширением множества коэффициентов группа уравнения уменьшается. Но ведь если уравнение решено, то его группа превращается в единичную, то есть в группу из одной тождественной перестановки. Так вот в чем тайна решения уравнений! Надо расширять множество коэффициентов и следить за тем, как меняется при этом группа уравнения (через много десятилетий все математики будут называть ее группой Галуа). Как только группа превратится в тождественную, уравнение решено. А расширять множество коэффициентов надо, присоединяя к нему корни каких-то вспомогательных уравнений. Теперь ясно, какие вспомогательные уравнения хороши, — только те, присоединение корней которых к допустимому множеству коэффициентов уменьшает группу Галуа.

Осталось выяснить, какой должна быть группа уравнения, чтобы его можно было решить в радикалах. Близкий результат появился в 1829 году в берлинском «Журнале Крелля». Его автором был знаменитый Абель. Он доказал, что уравнение решается в радикалах, если все его корни можно выразить в виде рациональных функций от одного корня $x_k = F_k(x_1)$, причем эти функции должны обладать следующим свойством коммутативности: $F_k(F_l(x_1)) = F_l(F_k(x))$. В этом случае и перестановки, сохраняющие соотношения $x_k = F_k(x_1)$, обладают тем же свойством коммутативности — их произведение не зависит от порядка сомножителей (для любых перестановок это не так).

Могучим напряжением ума Галуа решает задачу до конца. Оказывается, уравнение решается в радикалах в том и только в том случае, когда его группа определенным образом сводится к коммутативным группам перестановок (мы не будем здесь говорить точнее, что это значит). При этом Галуа вводит фундаментальные для всей теории групп понятия нормального делителя, смежного класса, разрешимой группы и так далее. Волшебный ключ найден — теория групп раскрывает тайны уравнений.

Перед Галуа разворачивается грандиозный план целой серии научных работ, которым суждено совершить переворот в математике... И здесь перед ним встает моральная проблема, о которой мы узнаем из записи, сохранившейся на листке бумаги:

«Человек, обладающий какой-нибудь идеей, имеет выбор: или пользоваться в течение своей жизни колоссальной репутацией ученого человека, или же оставить большое имя в будущем. Первое имеет место, если применять свою идею, не высказывая ее; второе — если ее опубликовать...»

Для Эвариста выбор ясен — его идеи принадлежат всему миру науки. Он хочет изложить все самое важное, что есть в его исследованиях, изложить добросовестно, без уловок, указывая путь, который привел его к этим результатам, отмечая все затруднения и нерешенные вопросы.

Но Галуа не было суждено выполнить свой план. Его захватили революционные события. Сразу после исключения из Нормальной школы он

вступил в артиллерию национальной гвардии. Из четырех батальонов артиллерии два почти целиком состояли из членов Общества друзей народа. Это была вооруженная сила революции, и правительство Луи-Филиппа постаралось как можно скорее распустить его. После этого Галуа участвовал во всех волнениях, потрясавших Париж на протяжении 1831 года. Математика была заброшена.

9 мая 1831 года Общество друзей народа организовало банкет в ресторане «Вандаж-де-Бургонь». Среди приглашенных на почетном месте — Александр Дюма. Многие участники в знак протеста надели мундиры артиллеристов национальной гвардии. Тосты за революцию 1793 года, за Робеспьера, за монтаньяров встречаются аплодисментами; тосты за революцию 1830 года — шиканьем и смехом. И вдруг... тост за Луи-Филиппа... Кто же провозгласил такой тост? Неужели неистовый республиканец Эварист Галуа? В ответ раздались свистки, но вдруг все умолкли — в руке у Галуа был не только стакан с вином, но и открытый нож! Осторожный Дюма предпочел удалиться с банкета. Но большинство осталось. Участники банкета, подражая Галуа, угрожающе поднимают руки и повторяют: «За Луи-Филиппа! За Луи-Филиппа!».

На следующий день Галуа арестовывают. Ему предъявляют обвинение «в попытке спровоцировать покушение на жизнь и особу короля французов путем заявления, сделанного в общественном месте во время публичного собрания». Суд, состоявшийся 15 июня, оправдал Галуа — защитник сумел убедить присяжных в том, что ресторан не является общественным местом. Галуа спокойно встал, взял со стола вещественных доказательств свой нож, закрыл его, положил в карман и вышел, не промолвив ни слова.

Но Эварист недолго оставался на свободе. 14 июля 1831 года, в день взятия Бастилии, несколько сотен манифестантов с развевающимися знаменами прошли по Новому мосту. Они протестовали против запрещения демонстраций Луи-Филиппом. В первых рядах — Галуа. На нем мундир национального гвардейца, в руке — карабин, под мундиром — кинжал. Как только демонстранты перешли мост, их окружили отряды полиции. Галуа был арестован вместе со многими другими участниками демонстрации. На этот раз его приговорили к шести месяцам тюремного заключения за незаконное ношение военной формы и оружия.

В тюрьме Сент-Пелажи Галуа отредактировал свои самые важные научные работы. В предисловии к одной из них он писал:

«Прежде всего, титульный лист этой работы не загроможден именами, фамилиями и званиями и не сопровождается похвалами скупым вельможам, кошелек которых открывается, когда вы им курите фимиам, и грозит захлопнуться, как только кадильница иссякает. Никто не увидит здесь заголовка, написанного аршинными буквами и выражающего почтительное благоговение перед светилом науки или каким-нибудь ученым покровителем, весьма полезным (и я даже сказал бы необходимым) для того, кто в двадцать лет хочет писать.

Я не говорю, что все хорошее в моей работе достигнуто благодаря советам и поощрениям такого-то. Не говорю потому, что это значило бы лгать...»

А лгать Эварист не мог. В тюрьме Сент-Пелажи он получил еще один «привет» от префекта полиции месье Жиске — пуля, пущенная 29 июля с чердака соседнего дома, влетела в камеру и расплющилась о стену в нескольких сантиметрах от головы заключенного.

Здесь же, в тюрьме, Галуа получил письмо из Академии наук. В нем лежала его рукопись и записка от секретаря академии Франсуа Араго:

«Дорогой месье Галуа!

Ваша рукопись была послана для ознакомления месье Пуассону. Он возвратил ее нам с отзывом, который мы здесь и приводим:

,,Мы приложили все усилия, чтобы понять доказательства месье Галуа. Его рассуждения недостаточно ясны, недостаточно развернуты и не дают возможности судить, насколько они точны...''»

Академия вновь, в который раз, не поняв, отвергла его работу...

Впрочем, отчасти в этом был виноват и сам Эварист. В спешке он не совсем ясно излагал свои мысли, а некоторые теоремы, которые не были им доказаны, сформулировал как доказанные. Да и стиль работ Галуа был непривычен для математиков начала XIX века. Новый стиль был провозвестником математики XX века. Вместо длинных выкладок для решения проблем применялись совершенно неожиданные идеи; кроме того, в его работах было слишком много новых понятий. Неудивительно, что Пуассону, научные интересы которого были далеки от теории алгебраических уравнений, эти работы показались недостаточно ясными.

Здоровье Эвариста ухудшается. 16 марта 1832 года его переводят в тюремную больницу. Именно здесь он познакомился с женщиной (имя ее осталось неизвестным), которая сыграла роковую роль в судьбе Галуа.

В последнюю ночь своей жизни он привел в порядок свои рукописи и написал несколько писем. В одном из них, адресованном своему единственному другу Огюсту Шевалье, он кратко изложил содержание своих исследований и попросил обратиться к виднейшим математикам для оценки важности этих результатов — в их истинности он не сомневался. Другое его письмо кончается словами: «Nitens lux, horrenda procella, tenebris aeternis, involuta» *), как бы резю-

*) «Ослепляющий свет, ужасная буря, окруженная вечным мраком» (*лат.*).

мирующими его судьбу такой, какой он ее тогда видел.

Утром 30 мая 1832 года какой-то крестьянин около пруда в местечке Жантийи наткнулся на тяжело раненого в живот молодого человека. Раненого перевезли в больницу, где он скончался утром следующего дня на руках своего брата.

— Не плачь, — просил Эварист брата перед смертью, — не плачь. Мне нужно сохранить все свое мужество, чтобы умереть в двадцать лет.

В одном из последних писем он писал: «Я умираю жертвой подлой кокетки и двух преданных ей простофиль». Но Эварист знал не все. Уже упоминавшийся префект полиции Жиске в своих «Мемуарах» вспоминал: «Месье Галуа, неистовый республиканец, был убит на дуэли одним своим другом». Уже одна такая осведомленность префекта полиции подозрительна. Есть и другие факты, указывающие на то, что дуэль была специально подстроена, чтобы убрать «неистового республиканца», угрожавшего жизни короля. Ведь недаром же в другом письме, адресованном «всем республиканцам», Эварист писал: «Прощайте! Я отдал свою жизнь на благо народа!»

Только через 14 лет после смерти Галуа его работы были разобраны и опубликованы Лиувиллем. Признание же пришло еще позже — в 70-х годах прошлого столетия.

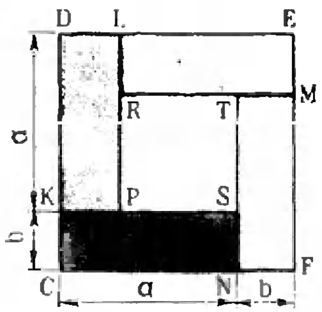
Сейчас имя Галуа — одно из самых популярных в математике. Группа Галуа, когомологии Галуа, поля Галуа — трудно перечислить все словосочетания, в которых встречается его фамилия. И когда, читая какую-нибудь научную работу, встречаешь сокращение Gal, не надо долго размышлять о его смысле: буквы Gal означают Galois — имя одного из величайших математиков всех времен и народов.

Новое доказательство

Вероятно, все наши читатели знакомы с теоремой о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Формулируется она так: *если есть два положительных числа a и b, то* $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, *причем равенство достигается, когда* $a = b$.

Приведем совсем простое и наглядное его доказательство.

Построим квадрат $CDEF$ со стороной $CD = a + b$ (см. рисунок). Предположим пока, что $a \neq b$. На сторонах квадрата от точек C, D, E, F отложим равные отрезки: $CK = DL = EM = FN = b$. Через точки L и N проведем прямые, параллельные стороне CD, а через точки K и M — параллельные стороне CF. Точки пересечения этих прямых обозначим через R, T, S, P. В результате этих построений получаем квадрат $RTSP$ и четыре равных прямоугольника, так что площадь квадрата $CDEF$ оказывается равной сумме площади квадрата $RTSP$ и учетверенной площади прямоугольника $KDLP$.



Площадь квадрата $CDEF$ равна $(a+b)^2$, площадь прямоугольника равна произведению ab, получаем такое равенство:
$(a+b)^2 = 4\,ab + S_{\square RTSP}$.

Но так как $S_{\square RTSP} \geqslant 0$ (очевидно), то $(a+b)^2 \geqslant 4\,ab$, откуда $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

Л. М. Дубинский

А. Ф. Андреев

СВЕРХТЕКУЧЕСТЬ ЖИДКОГО ГЕЛИЯ

Одним из важнейших достижений современной физики явилось открытие особых свойств жидкого гелия. Эти свойства неожиданны и парадоксальны. В настоящее время все они объединяются понятием сверхтекучести — явлением, открытым советским физиком П. Л. Капицей в 1938 году. Явление сверхтекучести, разумеется, не сводится к чисто количественной оценке, то есть к тому, что жидкий гелий течет значительно лучше других жидкостей. Свойства сверхтекучего гелия *), как показал в 1941 году советский физик-теоретик Л. Д. Ландау в своей теории сверхтекучести, — наиболее яркое проявление общих закономерностей в поведении любого вещества при достаточно низких температурах. Именно поэтому так велико то влияние, которое оказали исследования жидкого гелия и на другие, казалось бы, далекие области физики.

1. Свойства сверхтекучего гелия

Гелий не случайно называют инертным газом. Его атомы чрезвычайно слабо взаимодействуют с другими атомами и особенно между собой. Вот почему гелий переходит из газообразного состояния в жидкое при рекордно низкой температуре (4,2° К при нормальном атмосферном давлении) и при дальнейшем понижении температуры не затвердевает вплоть до абсолютного нуля. Твердый гелий существует лишь при повышенном давлении (около 25 атмосфер при температурах, близких к абсолютному нулю), когда из-за уменьшения расстояния между атомами силы сцепления возрастают, что способствует затвердеванию тела.

В интервале температур от 4,2° К до 2,2° К жидкий гелий ведет себя во всех отношениях как обычные жидкости. При температуре 2,2° К гелий переходит из обычного состояния, так называемого гелия I, в особое состояние — гелий II, обладающее свойством сверхтекучести. Ниже мы рассмотрим несколько наиболее важных экспериментов, проведенных с гелием II, и покажем, что результаты этих экспериментов в корне противоречат обычным представлениям о жидкости и что для их объяснения необходимо привлечение каких-то новых представлений.

Вязкость и сверхтекучесть

Первая загадка возникает при измерениях вязкости (или, другими словами, внутреннего трения) гелия II. В обычных жидкостях вязкость (точнее, коэффициент вязкости) может быть измерена двумя простейшими способами, дающими, конечно, один и тот же результат. Первый способ заключается в измерении скорости вытекания жидкости из сосуда через узкую щель под действием силы тяжести (рис. 1). Скорость жидкости, изображенная на рисунке стрелками,

*) Имеется в виду наиболее распространенный изотоп гелия He^4.

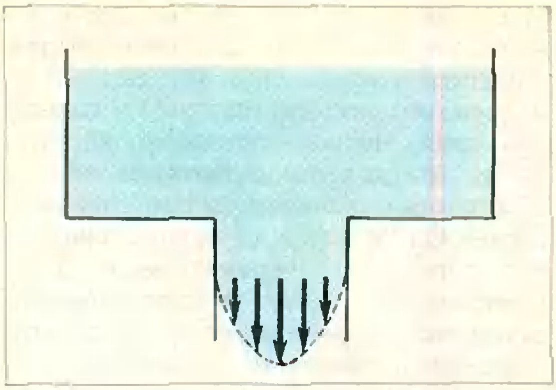


Рис. 1.

максимальна в средней части щели и убывает при приближении к стенкам. Различные слои движутся, таким образом, с разными скоростями, и поэтому между ними возникает сила внутреннего трения, от величины которой зависит скорость вытекания. По величине этой скорости можно судить о вязкости жидкости. Второй способ (рис. 2) заключается в измерении времени затухания крутильных колебаний погруженного в жидкость диска. Здесь все аналогично первому случаю. Жидкость вблизи диска увлекается его движением, а вдали она практически покоится. Различные слои жидкости вновь движутся с разными скоростями, и возникающая сила вязкости приводит в конце концов к тому, что энергия колебаний превращается в тепло. Измерив время затухания, можно определить вязкость.

Эксперименты с жидким гелием, проведенные первым способом, показали, что вязкость гелия I вполне заметна и измерима, но при переходе в область гелия II она скачком падает до неизмеримо малой величины, которая, скорее всего, равна нулю. Казалось бы, еще имеется возможность считать гелий II жидкостью, подчиняющейся обычным законам, но обладающей чрезвычайно малой вязкостью. Однако результаты измерений вторым способом дают для вязкости гелия II величину того же порядка, что и для гелия I. Таким образом, оказывается, что гелий II, в отличие от обычных жидкостей, в одних условиях совсем не обнаруживает вязкости, а в других его вязкость вполне заметна.

Фундаментальное свойство гелия II протекать через узкие щели, не обнаруживая вязкости, и было названо сверхтекучестью.

Перенос тепла и движение

В обычных жидкостях существует два механизма переноса тепла — теплопроводность и конвекция.

Теплопроводность — это передача тепла от более нагретых мест к менее нагретым в неподвижной жидкости. Рассмотрим следующий опыт (рис. 3). Нагреватель H излучает тепло в направлении, указанном на рисунке стрелкой; температура жидкости убывает слева направо. Если перенос тепла осуществляется теплопроводностью, то жидкость неподвижна, а от более нагретых мест к менее

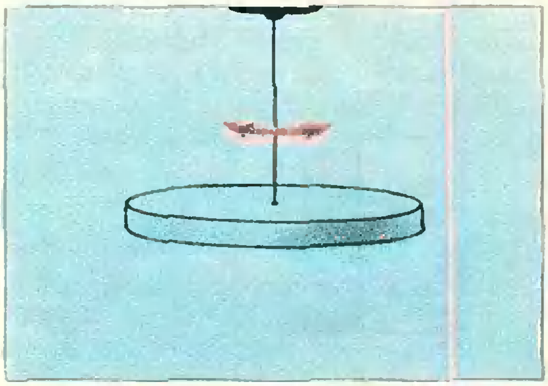


Рис. 2.

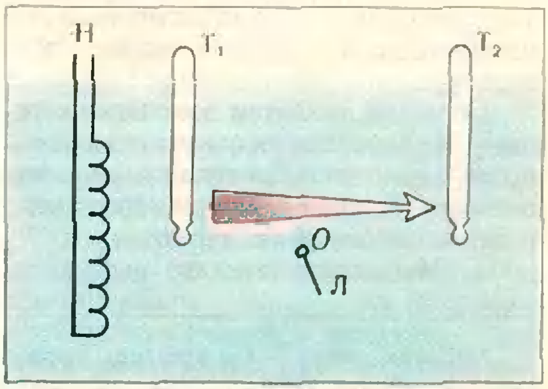


Рис. 3.

нагретым возникает поток тепла *). Для того чтобы теплопроводный поток тепла был отличен от нуля, необходимо, таким образом, чтобы термометр T_1 показывал более высокую температуру, чем термометр T_2. Количественной характеристикой теплопроводности является коэффициент теплопроводности, связанный с отношением потока тепла к разности температур. Чем больше коэффициент теплопроводности, тем больший поток тепла переносится в жидкости от одного участка к другому при одной и той же разности температур, или, другими словами, тем меньшая разность температур необходима, чтобы обеспечить один и тот же поток тепла.

Конвекционный перенос тепла связан с движением самой жидкости. Если в рассматриваемом опыте жидкость в силу каких-то причин приходит в движение в направлении слева направо, то в этом направлении происходит перенос тепла, поскольку движущаяся жидкость обладает тепловой энергией. Причиной возникновения потока тепла в данном случае является движение жидкости, а не разность температур. Конвекционный перенос тепла может, таким образом, происходить и при одинаковых показаниях термометров T_1 и T_2.

В обычных жидкостях конвекция связана с достаточно большими значениями потока тепла. Если поток тепла мал, то механизм переноса тепла является чисто теплопроводным, и мы можем определить коэффициент теплопроводности жидкости, измерив на опыте поток тепла и разность температур.

Если мы проведем этот опыт с гелием II, то обнаружим, что как угодно малые количества тепла переносятся через жидкость при абсолютно равных показаниях термометров T_1 и T_2. Можно сделать два вывода из этого результата. Предположим сначала, что в гелии II, как и в обычных жидкостях, при малых потоках тепла конвекция несущественна и основную роль играет теплопроводность. Тогда мы должны приписать гелию II бесконечно большую теплопроводность. Однако можно предположить, что в гелии II перенос тепла осуществляется всегда только посредством конвекции, а тогда разности температур может и не быть.

Для того чтобы выяснить, какое предположение соответствует действительности, поступим следующим образом. Установим в гелии лепесток *Л*, который может свободно вращаться вокруг неподвижной оси *О* (см. рис. 3). Мы обнаружим, что всегда, когда через гелий II протекает поток тепла, лепесток отклоняется в направлении потока, что явно указывает на движение жидкости. Таким образом, подтвердилась вторая гипотеза.

Ситуация, однако, значительно сложнее, чем нам сейчас может показаться. Рассмотрим следующий весьма наглядный опыт (рис. 4), проведенный П. Л. Капицей в 1941 году. Нагреватель *Н* установлен в гелии II, частично заполняющем замкнутый сосуд с единственным выходом в окружающий гелий II. Вблизи выхода находится тот же лепесток *Л* на оси *О*. Если включить нагреватель, то поток тепла будет вытекать из внутренней области наружу, что, как мы уже знаем, связано с движением жидкости. Действительно, лепесток *Л* отклоняется вправо, показывая, что

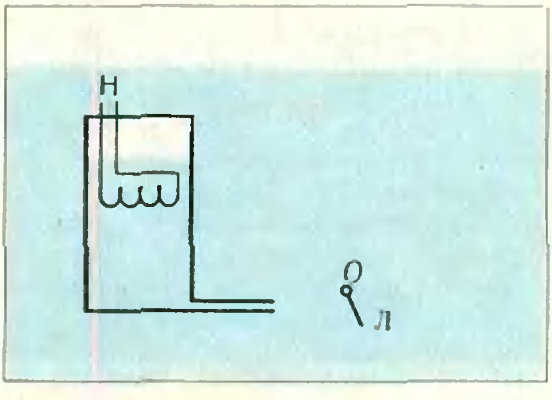


Рис. 4.

*) Поток тепла — это энергия, проходящая в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения энергии.

гелий вытекает из сосуда. Но самое удивительное в этом опыте то, что уровень жидкости в сосуде не понижается. Можно проводить опыт как угодно долго, лепесток все время будет отклонен. Жидкость, казалось бы, непрерывно вытекает, однако уровень остается прежним. Последний результат убедительно показывает, что законы движения гелия II должны принципиально отличаться от законов движения обычных жидкостей. В частности, и механизм конвекции в гелии II совершенно особый.

2. Теория сверхтекучести

При комнатных температурах существуют твердые тела, жидкости и газы. Если повышать температуру, то все твердые тела и жидкости превращаются в газ, то есть в систему, состоящую из отдельных свободно движущихся молекул. При дальнейшем повышении температуры тепловое движение атомов, входящих в состав молекул, становится столь интенсивным, что молекулы начинают распадаться на отдельные атомы. При еще более высоких температурах (порядка десятков тысяч градусов) атомы распадаются на электроны и атомные ядра. При столь высоких температурах любое вещество, таким образом, представляет собой газ, состоящий из свободных электронов и ядер*).

Сверхтекучий гелий II — это жидкость, существующая лишь при достаточно низких температурах (от 2,2° К и ниже). Поэтому, для того чтобы объяснить его свойства, нам необходимо выяснить сначала общие закономерности, связанные с изменением характера теплового движения в любом веществе при понижении температуры.

Элементарное возбуждение

Рассмотрим процесс понижения температуры, начав с температур порядка десяти тысяч градусов. Что произошло, когда электроны и ядро объединились в атом? Для нас существенно следующее. До объединения каждый электрон и ядро имели по три степени свободы, соответствующие их независимому движению в пространстве. После объединения возможно свободное движение лишь атома в целом. Число степеней свободы системы уменьшилось. Можно сказать, что с понижением температуры уменьшилось число возможных видов теплового движения.

При дальнейшем понижении температуры все новые и новые виды теплового движения исчезают, или, как говорят, вымерзают. Вслед за движением электронов относительно ядра вымерзает движение атомов относительно центра тяжести молекулы. При комнатных и более низких температурах мы можем вообще забыть о том, что молекулы состоят из атомов, которые в свою очередь состоят из электронов и ядер, и считать, что тепловое движение есть движение молекул как неделимых частиц. Когда газ или жидкость затвердевают, молекулы уже не имеют возможности свободно перемещаться в пространстве на заметные расстояния, а совершают лишь малые колебания вблизи определенных положений равновесия.

Процесс вымерзания видов теплового движения происходит, конечно, и при температурах ниже комнатных. Так как при абсолютном нуле температуры вообще все виды теплового движения должны исчезнуть, то можно предположить, что при достаточно низких температурах во всяком веществе эффективен лишь какой-то один наиболее устойчивый к вымерзанию вид теплового движения. Этот вид движения называют элементарным возбуждением. Элементарные возбуждения в разных веществах различны. Поэтому основная задача, возникающая при исследовании свойств какого-либо вещества при очень низких температурах, заключается в выяснении природы его элементарных возбуждений.

*) Такое состояние вещества называется плазмой.

Для жидкого гелия II это не может быть, конечно, движение отдельных атомов гелия *), хотя бы потому, что именно на таком представлении о тепловом движении основана физика обычных жидкостей, законам которой, как мы видели, свойства гелия II явно противоречат. Нужные нам элементарные возбуждения следует искать среди каких-то других видов теплового движения. Л. Д. Ландау предположил, что элементарными возбуждениями гелия II являются не движения отдельных атомов, а коллективные движения атомов жидкости, то есть звуковые колебания, и показал, что на основе этого предположения можно построить последовательную теорию сверхтекучести. Сейчас предположение о звуковой природе элементарных возбуждений полностью подтверждено многочисленными экспериментальными исследованиями.

Существуют и простые соображения, показывающие естественность такого предположения. Действительно, в обычных веществах процесс вымерзания движения отдельных молекул связан с затвердеванием жидкости. В твердом теле молекулы могут совершать, как уже отмечалось выше, лишь малые колебания вблизи определенных положений равновесия. Но это не есть независимые колебания отдельных частиц. Колебание какой-либо молекулы сразу передается соседям, и в результате возникает колебание всего коллектива молекул, то есть всего твердого тела. А это и есть звуковые волны. В обычных веществах, таким образом, процесс вымерзания движения отдельных молекул означает переход к звуковому типу движения. Звук может распространяться и в жидкостях, однако в обычных жидкостях он в конце концов всегда затухает просто потому, что его энергия превращается в энергию теплового движения отдельных частиц, которое играет там решающую роль. Но если мы имеем жидкость, о которой известно, как в случае с гелием II, что движение отдельных частиц в ней должно уже вымерзнуть, то звук неизбежно становится единственным видом теплового движения. Можно сказать так: процесс вымерзания индивидуального движения частиц рано или поздно обязательно должен произойти, и после этого может остаться только коллективный, то есть звуковой, вид движения. Во всех веществах этот процесс сопровождается затвердеванием. В гелии же из-за весьма слабого взаимодействия между атомами затвердевания не происходит, и поэтому переход от индивидуального к коллективному движению осуществляется в жидком состоянии.

Это свойство жидкого гелия отличает его от всех других жидкостей, и именно оно, как мы увидим, лежит в основе всех обсуждавшихся выше необычных явлений, наблюдавшихся в гелии II. Утверждение о том, что элементарными возбуждениями в гелии II являются звуковые волны, означает, что при низких температурах тепловое движение в жидком гелии целиком обусловлено наличием звуковых волн, которые распространяются по всем возможным направлениям. Внутренняя энергия теплового движения (или просто тепло) при этом есть не что иное, как энергия звуковых волн. При повышении температуры внутренняя энергия должна возрастать, а это значит, что должна увеличиться энергия звуковых волн.

Некоторые свойства звуковых волн в жидкости

Первое важное для нас свойство заключается в том, что распространение звука сопровождается переносом массы жидкости в направлении распространения. Если проследить за движением какой-либо частицы жидкости при распространении в жид-

*) Молекула гелия состоит из одного атома.

кости звуковой волны, то оказывается, что на ее колебательное движение накладывается медленное поступательное движение в направлении распространения волны*).

Наличие переноса массы в любой системе частиц означает, что система обладает отличным от нуля импульсом (количеством движения). Следовательно, и звуковая волна несет импульс в направлении распространения волны. Это подтверждается целым рядом опытных фактов. Например, если звук падает на стенку и поглощается ею или отражается, то изменение импульса передается стенке, и возникает так называемое звуковое давление.

В жидком гелии II тепловое движение обусловлено наличием звуковых волн. Обычно энергия волн, распространяющихся по различным направлениям, одинакова, и потому переноса массы нет. Если же по какой-либо причине звуковые волны приобретают преимущественное направление распространения, то в этом направлении возникнет перенос массы жидкости.

Рассмотрим еще вопрос об излучении звука в жидкости. Для того чтобы погруженное в жидкость тело излучало звук, необходимо, чтобы оно совершало колебательное движение. Тело, движущееся в жидкости с постоянной скоростью и не совершающее при этом никаких пульсирующих движений (изменений формы, размеров и т. п.), звук излучать не может.

Здесь следует сделать одну оговорку. Последнее утверждение справедливо, если скорость тела не слишком велика, во всяком случае меньше скорости звука. При сверхзвуковой скорости даже равномерно движущееся тело может излучать звук **).

Те же самые утверждения справедливы, очевидно, и в случае, когда тело неподвижно, а жидкость движется. В частности, если жидкость обтекает тело со скоростью, меньшей звуковой, то излучение звука невозможно.

Объяснение свойств гелия II

Свойство сверхтекучести жидкого гелия II непосредственно вытекает из свойств звуковых волн в жидкости. В самом деле, трение, возникающее при течении через щель обычных жидкостей, приводит к тому, что в результате взаимодействия частиц жидкости с неровностями стенок кинетическая энергия движения жидкости превращается в тепло. В случае гелия II, в котором внутренняя энергия представляет собой энергию звуковых волн, наличие трения означало бы, что энергия звуковых волн увеличивается, то есть что при обтекании неровностей стенок жидкость излучает звук. Но это, как мы видели, невозможно при малых скоростях течения.

Рассмотрим, однако, процесс течения гелия II через щель более подробно. Невозможность излучения звука означает, что в жидкости не могут появиться новые звуковые волны. Но при любой отличной от нуля температуре в ней уже имеются звуковые волны, связанные с наличием теплового движения. Чтобы рассмотреть их взаимодействие со стенками, выберем в качестве системы отсчета саму движущуюся жидкость, то есть будем считать, что жидкость покоится, а стенки щели движутся в противоположном направлении. Свойство сверхтекучести состоит в том, что движу-

---

*) Обычно этим поступательным движением пренебрегается, так как его скорость, пропорциональная амплитуде колебаний, мала по сравнению со скоростью распространения волны.

**) Наглядным проявлением этого эффекта является изменение характера излучения звука самолетом, преодолевающим звуковой барьер. Самолет, летящий с дозвуковой скоростью, излучает звук лишь благодаря вибрациям, связанным в основном с работой двигателей. При скорости, большей звуковой, интенсивность излучения резко возрастает, поскольку включается механизм непосредственного излучения звука самим самолетом.

щиеся стенки не увлекают жидкость, но «увлекают» имеющиеся в жидкости звуковые волны. Действительно, при «столкновениях» звуковых волн с движущейся шероховатой стенкой они получают от нее некоторый импульс в направлении движения стенки. Ясно поэтому, что движение стенок приводит к появлению преимущественного направления распространения звуковых волн. При этом, как мы знаем, возникает перенос массы жидкости. Таким образом, в действительности движущиеся стенки увлекают своим движением некоторую массу, но при низких температурах энергия звуковых волн весьма мала, и потому переносимая ими масса много меньше полной массы жидкости.

Можно представить, как будто гелий II состоит из двух компонент, способных двигаться независимо друг от друга. Движение одной из них не сопровождается трением, и она называется поэтому сверхтекучей компонентой. При движении другой компоненты, увлекающейся стенками, как и в обычных жидкостях, возникает трение; эта компонента называется нормальной. Сумма масс обеих компонент равна полной массе жидкости. Нужно, конечно, иметь в виду, что разделение гелия II на две компоненты является чисто условным. В действительности, как мы видели, в гелии II могут существовать два вида движений, каждое из которых сопровождается переносом своей массы, причем сумма масс равна истинной массе жидкости. Одно из этих движений связано с движением звуковых волн и сопровождается трением, второе обладает свойством сверхтекучести. Все атомы гелия участвуют в обоих движениях, о разделении атомов на свертекучие и нормальные при этом не может быть и речи.

При повышении температуры энергия звуковых волн возрастает и вместе с тем возрастает масса, связанная с нормальным движением. Наконец, при некоторой температуре она становится равной истинной массе жидкости. При этом сверхтекучее движение исчезает, так как исчезает переносимая им масса, и гелий II переходит в гелий I, который ведет себя как обычные жидкости, поскольку в нем возможно только нормальное движение.

Если в гелии II равномерно движется какое-либо тело со скоростью, меньшей звуковой, то возникающее при этом сверхтекучее движение не оказывает ему никакого сопротивления. Действительно, если сила сопротивления отлична от нуля, то для перемещения тела к нему нужно приложить силу, которая совершит работу. Однако эта работа может превратиться лишь в тепло, то есть пойти на излучение звука в жидкости, что, как мы знаем, невозможно. Этот результат можно сформулировать и как отсутствие силы давления на тело, обтекаемое сверхтекучим движением. Звуковые же волны при встрече с поверхностью твердых тел, погруженных в жидкость, обмениваются с ними импульсом, что мы уже видели на примере их взаимодействия со стенками щели. Поэтому обтекание нормальным движением сопровождается возникновением силы давления.

Теперь мы можем легко объяснить рассмотренные вначале эксперименты с гелием II.

При измерении вязкости первым способом (опыт со щелью) вязкость гелия II не обнаруживается, поскольку сверхтекучая компонента весьма быстро вытекает через щель без трения. Тот факт, что она имеет плотность, несколько меньшую полной плотности, в данном случае совершенно незаметен, так как любая обычная жидкость, обладающая вязкостью протекала бы через достаточно узкую щель несравненно медленнее.

Измерения вязкости с помощью колеблющегося диска приводят к отличной от нуля вязкости потому, что диск движется в жидкости, содержащей обе компоненты. Затухание его колебаний происходит из-за взаимодействия с нормальной компонентой.

Можно сказать, что в эксперименте со щелью проявляет себя сверхтекучая компонента, а в эксперименте с диском — нормальная.

Выделение тепла в гелии II представляет собой процесс излучения звуковых волн. Перенос тепла в каком-то определенном направлении происходит потому, что энергия звуковых волн, распространяющихся в этом направлении, больше, чем в обратном. Поэтому направление переноса тепла является в то же время направлением преимущественного распространения звуковых волн и связанной с ними нормальной компоненты. Перенос тепла в гелии II, таким образом, всегда сопровождается движением нормальной компоненты, то есть механизм переноса тепла всегда конвекционный. Вот почему в опыте, схема которого изображена на рисунке 3, показания термометров были одинаковы, а лепесток все время отклонялся в направлении теплового потока под действием обтекающей его нормальной компоненты.

Если поток тепла имеет место в гелии II, заполняющем некоторый замкнутый сосуд, как на рисунке 4, то непрерывного переноса массы жидкости в одном направлении не происходит, так как порождаемая потоком разность давлений вызывает движение сверхтекучей компоненты в обратном направлении. Причем, скорость сверхтекучего движения соответствует тому, что суммарный перенос массы отсутствует, поэтому уровень жидкости не меняется. Отклонение лепестка показывает, что из внутренней области вытекает нормальная компонента, а сверхтекучее движение остается незаметным, так как оно не оказывает давления на обтекаемые им тела.

Точки на плоскости

Вот задача, решение которой, на первый взгляд, кажется совершенно невозможным. Требуется найти на плоскости такой конечный набор точек, что перпендикуляр, восставленный в середине отрезка, соединяющего любые две точки, обязательно пересечет еще хотя бы две точки из этого набора. Тем не менее задача имеет интересное решение. А набор с таким удивительным свойством состоит всего из восьми точек. Постарайтесь отыскать его!

Задачи

Задача 1. *Какое число точек можно выбрать*

а) на плоскости,

б) в пространстве

так, чтобы каждые три точки служили вершинами прямоугольного треугольника?

Задача 2. *Какое число точек можно выбрать*

а) на плоскости,

б) в пространстве

так, чтобы каждые три точки служили вершинами тупоугольного треугольника?

И. Я.

Л. Е. Садовский,
А. Л. Садовский

Как измеряют площадь

Задачу измерения площади фигуры, ограниченной некоторой замкнутой линией, приходится решать лицам самых различных специальностей: математикам, геодезистам, физикам....

Прежде всего возникают два тесно связанных между собой вопроса: *что такое площадь* и *что значит ее измерить?*

Эти вопросы не так уж просты, и школьный курс геометрии дает ответы на них постепенно и только для некоторых частных случаев. Сначала для ряда простейших фигур — квадрата, прямоугольника, треугольника, а затем для многоугольника, круга и некоторых его частей (сектора, сегмента).

Вспомним, что квадрату, сторона которого равна единице длины, приписывают площадь, равную единице (площади). Это условие является аксиомой (аксиома единицы площади). Если, далее, фигура (рис. 1) состоит из двух частей, которые имеют не более чем конечное число общих отрезков и точек, и если при этом площади частей определены, то сумму площадей этих частей принимают за площадь всей фигуры. Условие это называется аксиомой сложения площадей (аддитивностью площади *). Наконец, условливаются равным фигурам приписывать равные площади (аксиома конгруэнтности).

*) О свойстве аддитивности некоторых величин шла речь в статьях: Ионин Ю. И. Интеграл. «Квант», 1972, № 9 и Смородинский Я. А. Инертная масса. «Квант», 1972, № 3.

Теперь мы готовы ответить на следующий вопрос.

Что называется площадью фигуры?

Рассмотрим фигуру F с границей C. Предположим, что существует достаточно большой квадрат, целиком содержащий F (такая фигура называется ограниченной).

Воспользуемся палеткой — прозрачной пластинкой с нанесенными на нее двумя семействами взаимно перпендикулярных прямых. Эти прямые образуют сеть, состоящую из квадратиков. Назовем ее сеткой разряда k, если стороны кадратиков равны $h_k = \frac{1}{10^k}$ (k — целое число).

Наложим палетку на фигуру F (рис. 2) и рассмотрим те квадратики, которые имеют общие точки с внутренней частью фигуры F или с контуром C. Они составляют многоугольник F_k (окрашенный в желтый и зеленый цвет на рисунке 2). Ясно, что

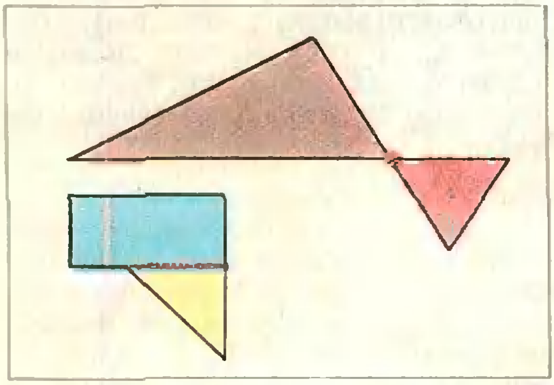


Рис. 1.

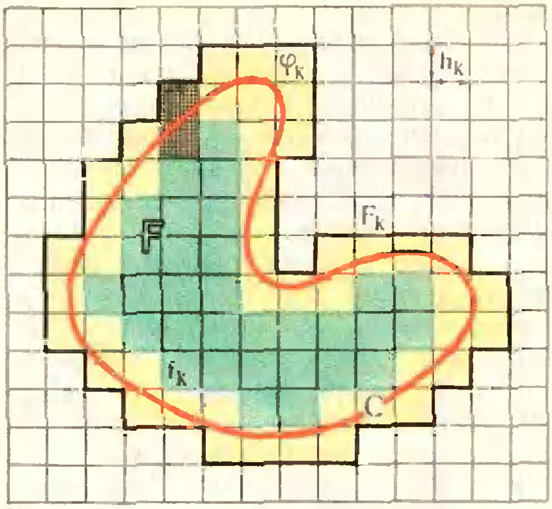


Рис. 2.

F_k полностью покрывает фигуру F и может даже выходить за ее границу C. Площадь F_k, согласно аксиоме аддитивности, равна сумме S_k площадей этих квадратиков (она пропорциональна числу квадратиков, составляющих F_k). Величину S_k естественно принять за **приближенное значение площади фигуры** F (**с избытком**).

Подсчитаем теперь сумму s_k площадей тех квадратиков сетки разряда k, которые целиком содержатся в F. Эти квадратики составляют многоугольник f_k (он окрашен в зеленый цвет), не выходящий за контур C. Ясно, что при любом k справедливо неравенство $s_k \leqslant S_k$. Естественно принять s_k за **приближенное значение площади** F (**с недостатком**).

Заметим, что сам контур C оказывается заключенным в некоторой многоугольной области φ_k (она окрашена в желтый цвет), лежащей между границами многоугольников F_k и f_k; площадь φ_k равна $S_k - s_k$.

Можно убедиться (проверьте это!), что при переходе от сетки разряда k к сетке разряда $k+1$ выполняется неравенство $S_k \geqslant S_{k+1}$. При этом каждое число S_k неотрицательно, поэтому монотонно убывающая и ограниченная снизу последовательность

$$S_1 \geqslant S_2 \geqslant S_3 \geqslant \ldots \geqslant S_k \geqslant \ldots \quad (1)$$

должна иметь предел $S = \lim\limits_{k\to\infty} S_k$.

Аналогично, монотонно возрастающая последовательность

$$s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_k \leqslant \ldots \quad (2)$$

также имеет некоторый предел $s = \lim\limits_{k\to\infty} s_k$.

Предположим, что при неограниченном увеличении разряда k сетки (и, следовательно, при стремлении h_k к нулю) последовательности (1) и (2) имеют один и тот же предел: $s = S$. В этом случае фигуру F называют *квадрируемой* и площадь ее принимают равной S *). Если F квадрируема, то ее граница C, как это следует из предыдущего, может быть заключена в многоугольную область φ_k, площадь $S_k - s_k$ которой неограниченно уменьшается при возрастании k. Поэтому вполне логично условиться считать, что площадь такого контура C равна нулю. Таким образом, если область F квадрируема, то площадь ограничивающего ее контура равна нулю.

Справедливо, конечно, и обратное утверждение (докажите его): *если площадь контура C равна нулю* (это значит, что C можно покрыть многоугольной областью φ_k, составленной из квадратиков сетки разряда k, площадь которой стремится к нулю при k, стремящемся к бесконечности), *то фигура F квадрируема.*

В большинстве практических случаев приходится иметь дело с линиями C нулевой площади. К их числу

---

*) Заметим, что все рассуждения в действительности не зависят от ориентации палетки относительно фигуры. Если при одной ориентации сеток фигура F оказывается квадрируемой, то она окажется такой же и при произвольном смещении сеток. И хотя при новом положении сеток сами числовые последовательности (1) и (2) меняются, предел их S остается одним и тем же.

Проведенные здесь рассуждения вполне аналогичны тем, которые в учебниках геометрии приводят к определению площади круга как предела последовательности площадей правильных вписанных (описанных) многоугольников при неограниченном удвоении числа их сторон.

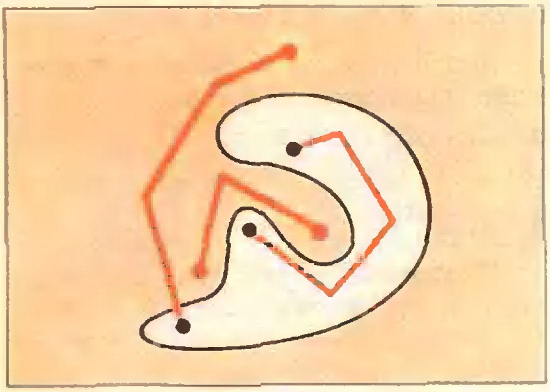


Рис. 3.

относятся линии, изученные французским математиком Камилем Жорданом (1838—1922). Это так называемые *жордановы кривые*. Если жорданову кривую рассматривать как траекторию движущейся (в плоскости) точки, то ее прямоугольные координаты x и y можно задать как непрерывные функции

$$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

времени t ($t_0 \leqslant t \leqslant t_1$).

Жордан доказал, что всякая замкнутая жорданова линия C без точек самопересечения разбивает всю плоскость на две части: внутреннюю и внешнюю (рис. 3); для каждой из них C служит общей границей. Любые две точки, принадлежащие одной и той же части фигуры (например, внутренней), можно соединить ломаной, не пересекающей C. Любая ломаная, соединяющая две точки из разных частей, неизбежно пересекает C. Так как площадь всякой замкнутой и несамопересекающейся жордановой кривой равна нулю, то фигура F (она ограничена) квадрируема, то есть для нее последовательности (1) и (2) имеют общий предел S.

Измерение площади

Теперь становится понятным, что значит измерить площадь квадрируемой фигуры F. Это значит найти число S — предел последовательности чисел S_k (или s_k). Каждое из чисел S_k дает лишь приближенное значение площади с избытком (s_k — с недостатком). Этот избыток (недостаток) тем меньше, чем больше разряд k сетки.

Естественно, что на практике не вычисляют предел S, а ограничиваются определением его приближенного значения S_k с помощью сетки подходящего разряда *).

Однако издавна возникла потребность в более совершенных, чем палетка, приборах, позволяющих измерять площадь быстрее, точнее и, по возможности, автоматически. Первые такие приборы, называемые *планиметрами*, были созданы более ста лет тому назад и, как очень часто бывает в вопросах большой практической или научной важности, почти одновременно в различных странах. Один из первых планиметров (планиметр-самокат) был изобретен в 1854 году русским механиком П. А. Зарубиным (1816—1886). В том же году иную конструкцию планиметра предложил швейцарский математик Я. Амслер (1823—1912).

Эти и подобные им планиметры основаны на довольно простой и вместе с тем весьма плодотворной идее (мы изложим лишь саму идею, а строгие доказательства опустим).

Рассмотрим в плоскости чертежа два произвольных положения некоторого отрезка (стержня). Перевести отрезок из исходного положения A_0B_0 в конечное — AB (рис. 4а) можно с помощью перемещений трех типов:

(1) поворотом вокруг середины C_0 стержня на угол $\alpha \geqslant 0$ в положение A_1B_1, параллельное AB;

(2) поступательным перемещением на величину $h \geqslant 0$ в направлении, перпендикулярном A_1B_1, переводящим отрезок в положение A_2B_2 на прямой AB;

*) Заметим, что методы интегрального исчисления позволяют в большинстве практических случаев определить число S без использования последовательности (1) или же найти приближенное значение S более экономным путем, нежели подсчетом квадратиков по сетке (о понятии интеграла см. статью: Ионин Ю. И. Интеграл. «Квант», 1972, № 9).

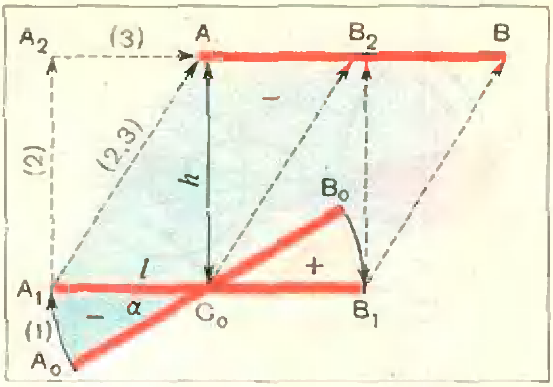


Рис. 4а.

(3) сдвигом на $g \geqslant 0$ в направлении AB, совмещающим точку A_2 с точкой A.

Впрочем, из курса физики известно, что два последних перемещения можно заменить одним — поступательным перемещением, переводящим A_1B_1 сразу в AB. При этом отрезок «заметет» параллелограмм B_1A_1AB с высотой h и основанием, равным длине l отрезка.

Подсчитаем всю площадь, заметаемую отрезком при перемещении из A_0B_0 в AB. Прежде, однако, примем важное правило.

Условимся приписывать (глядя из B в A) площади положительный знак, если она при перемещении стержня остается справа от него, и отрицательный, если она остается слева (рис. 4а).

С учетом этого правила ясно, что суммарная площадь, заметенная отрезком в результате перемещения первого типа, равна нулю.

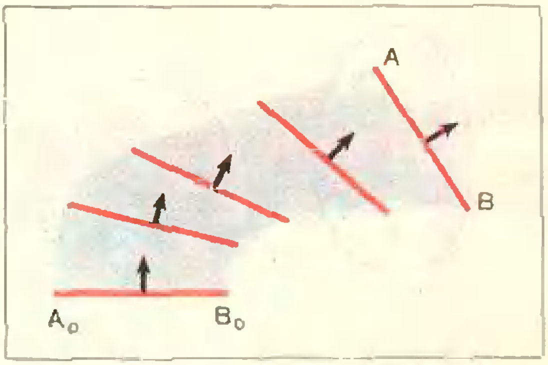


Рис. 4б.

Естественно, что равна нулю площадь, заметенная при перемещении третьего типа. Отличной от нуля оказывается лишь площадь прямоугольника, заметенного при поступательном перемещении второго типа; она равна lh (этой же величине равна и площадь параллелограмма B_1A_1AB).

Если теперь стержень совершает произвольное перемещение из положения A_0B_0 в положение AB, то в любой момент это перемещение можно разложить на три типов (1), (2) и (3). При этом перемещения (1) и (3) не дают вклада в заметаемую площадь, а перемещение в направлении, перпендикулярном отрезку (типа (2)), полностью определяет заметаемую площадь (это — самое «тонкое» место в наших рассуждениях, именно здесь мы не приводим строгие доказательства).

Таким образом, для определения суммарной площади (точнее, алгебраической суммы площадей), заметенной отрезком известной длины l, достаточно иметь устройство, измеряющее суммарное перемещение отрезка в перпендикулярном направлении (рис. 4б).

Оказалось, что таким устройством может служить небольшое колесико R с закругленными краями, насаженное в середине (в точке C_0) стержня и соединенное с ним так, что оно может лишь вращаться. Ясно, что при перемещениях первого и третьего типов колесико не станет вращаться, а увлекаемое стержнем будет лишь скользить по поверхности чертежа. Но зато при перемещении второго типа оно практически без скольжения будет катиться по чертежу, поворачиваясь относительно стержня. При этом оно повернется как раз на дугу, равную h.

Следует иметь в виду, что колесико можно поместить в любой точке стержня. При этом сохраняется возможность использовать его для измерения площади. Попробуйте убедиться сами, что если колесико сместить на величину λ относительно середины стержня, то его показания изменятся на $\lambda\alpha$, где α — угол (в радианах), образованный исходным и конечным положением стержня.

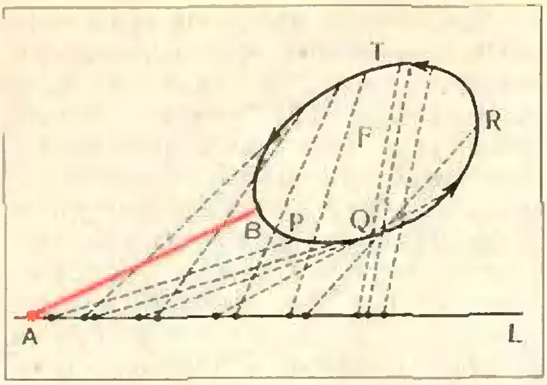


Рис. 5.

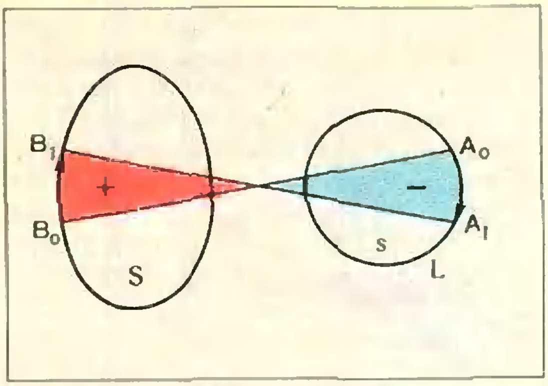


Рис. 6.

Если окружность колесика разбить на некоторое число делений, а на стержне укрепить указатель, то окажется возможным следить за тем, насколько поворачивается колесико. Возникнет простейший счетный механизм. Сразу замечаем, что не всегда второй отсчет (после обвода) оказывается больше первого (до обвода), все зависит от того, в какую сторону будет вращаться колесико. Если сдвинуть стержень из положения A_0B_0 в положение AB, а затем возвратить его снова в исходное, то в результате отсчет останется без изменения, то есть указатель будет стоять против одного и того же деления в начале и в конце этих двух перемещений. Это естественно, так как стержень дважды прошел над параллелограммом B_1A_1AB; один раз площади приписывался положительный знак, другой — отрицательный.

Воспользуемся полученными результатами для вычисления площади S фигуры F с криволинейной границей, например, такой, как на рисунке 5. Для этого один из концов B стержня будем перемещать вдоль границы F в направлении стрелки. Конец A пусть при этом движется по прямой LA. На рисунке 5 показано несколько положений стержня при его перемещении от точки P границы к точкам Q, R и T.

Мы замечаем, что над определяемой площадью S стержень AB пройдет лишь один раз — при перемещении из точки Q к точкам R, T, P. Зато площадь, лежащая вне границы, будет пройдена дважды, и притом в различных направлениях: один раз при движении от точки Q к R и T, а второй — при перемещении от T к P и Q.

Итак, если стержень в конце обхода займет исходное положение, то в результате колесико покажет величину h, отвечающую только площади S. Конец A не обязан двигаться по прямой, он может перемещаться по дуге окружности или замкнутой (направляющей) линии L. Но в последнем случае не только над площадью S, но и над площадью s (рис. 6) фигуры, охватываемой L, стержень проходит лишь один раз. Когда обе границы обходятся в одном направлении, то все элементы площади S остаются справа от стержня AB, а элементы площади s — слева, и потому им присваиваются различные знаки (отсчет колесика отвечает их разности). Если же они обходятся в разных направлениях (рис. 7), то

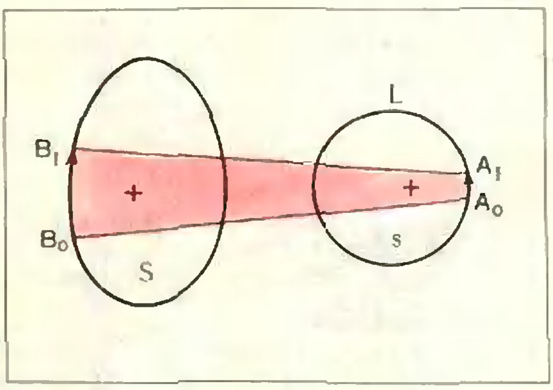


Рис. 7.

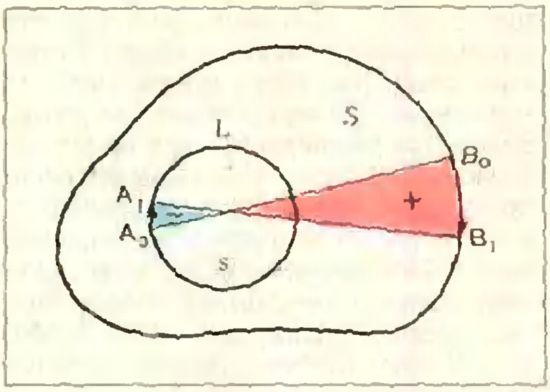


Рис. 8.

отсчет отвечает их сумме. Поэтому

$$lh = S \pm s. \qquad (3)$$

В качестве *границы s можно выб*рать *круг радиуса r*; тогда $s = \pi r^2$ *и искомая* площадь составит

$$S = lh \pm \pi r^2.$$

В этой формуле знак плюс выбирается, например, и тогда, когда s лежит внутри S (рис. 8).

Все сказанное означает, *что* стержень с колесиком *(его часто* называют *интегрирующим)* может служить *планиметром*. Однако такой простой прибор неудобен в работе и вносит большие погрешности. В действительности планиметр устроен несколько сложнее, хотя принцип его работы остается тем же. Имеются планиметры многих типов, выпускаемые различными заводами *точной* механики. Они *отличаются друг* от друга *конструкциями* отдельных элементов, *а также* выбором кривой, по которой движется *конец A* стержня. В качестве *такой* кривой обычно выбирают либо прямую линию (линейный планиметр), либо окружность (полярный планиметр).

Конструкции планиметров

Рисунок 9 дает представление об общем виде полярного планиметра. Полярный рычаг p и обводный рычаг l соединены шарниром b и могут быть отделены друг от друга; на конце обводного рычага имеется острый шпиль F, которым обводят *границу площади*, и *упор f, предохраняющий* чертеж *от повреждения* шпилем. Полярный рычаг вращается вокруг своего конца (полюса), шарнирно соединенного с тяжелой платой $П$ (она не позволяет полюсу сдвигаться). Счетный механизм (рис. 10) связан с обводным рычагом. Его *можно сдвигать* вдоль *этого рычага и укреплять в нужном положении* винтом q. Счетный механизм *опирается* на измерительное колесико R и дополнительный опорный ролик C, придающий прибору устойчивость. Вращение колесика R через червячный винт передается счетному диску Z. Один полный оборот колесика вызывает поворот диска на одно из десяти *нанесенных* на нем *делений. Периметр* связанного *с роликом* счетного *барабанчика* T разделен на сто малых делений. С помощью расположенного рядом с ним верньера V можно отсчитывать десятые доли малого барабанчика T.

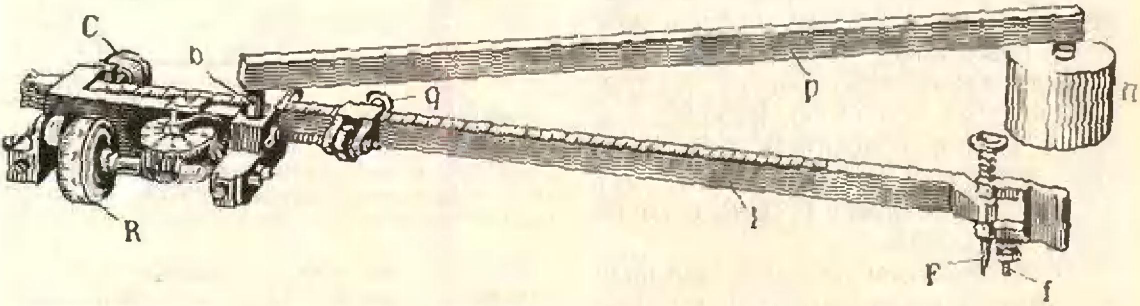


Рис. 9. Полярный планиметр

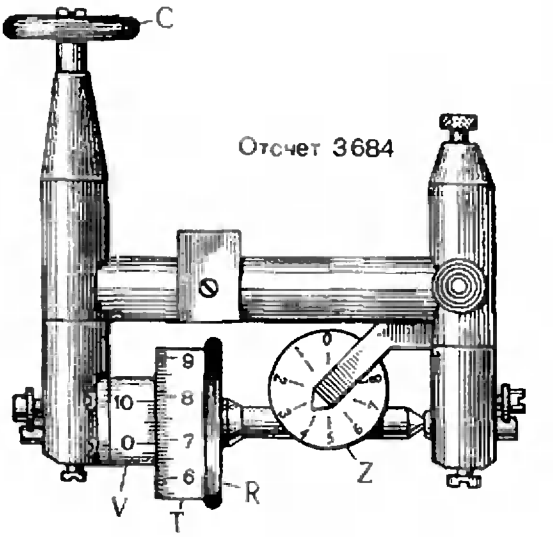


Рис. 10. Счетный механизм полярного планиметра.

Каждый отсчет представляет собой четырехзначное число: сначала записывается количество полных делений на диске Z, затем число больших делений на барабанчике T, потом число полных малых делений на нем и, наконец, число десятых малого деления.

Для определения площади S в делениях планиметра следует установить обводный шпиль F в некоторой точке границы, заметить начальный отсчет, обвести всю границу, и, вернувшись в исходную точку, записать новый отсчет. Затем вычесть из первого отсчета второй; тогда их разность (с точностью до знака) даст число, которое для получения искомой величины h надо умножить на радиус ρ колесика. Чтобы каждый раз не приходилось умножать длину l на величину h, подсчитывают заранее, чему соответствует одно деление планиметра (так называемую «цену деления» планиметра) при определенной длине обводного рычага l. Для этого обводят какую-либо фигуру (например, квадрат или круг), площадь которой можно подсчитать по формулам геометрии. Затем делят эту площадь на разность отсчета в конце и в начале обвода.

В специальном паспорте, который прилагается к каждому прибору, указывается цена деления при различной длине l обводного рычага. Эту длину можно изменять, сдвигая счетный механизм. При сдвигах счетного механизма измерительное колесико смещается от средней точки на ту или иную величину λ. Тем не менее можно доказать, что выведенная выше формула остается по-прежнему справедливой. Исключение представляет случай, когда в результате обвода границы рычаг l совершит полный оборот. В этом случае разность отсчетов надо увеличить на $2\pi l\lambda$.

Самодельный планиметр

Среди всех планиметров имеется один необычайно простой. Это так называемый «планиметр-топорик Прица» (1886 г.). Он может быть изготовлен из куска обыкновенной проволоки, согнутой в виде растянутой буквы П (рис. 11). Один из загнутых концов k заостряется и служит обводным шпилем, другой конец T расплющивается и имеет вид топорика, лезвие которого лежит в одной плоскости с острием. Острие k устанавливается в некоторой точке O внутри измеряемой площади (желательно поближе к центру тяжести обводимой фигуры). Положение точки T_0 касания лезвия топорика с чертежом отмечают; затем, держа топорик отвесно, ведут острие к границе, обводят всю границу и возвращаются в исходную точку O. При этом топорик описывает некоторую кривую (если лезвие острое, она окажется

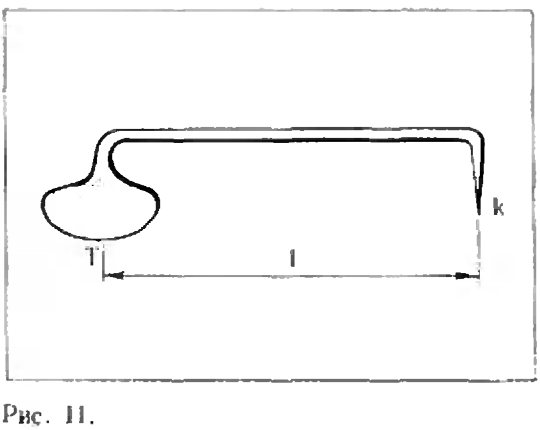


Рис. 11.

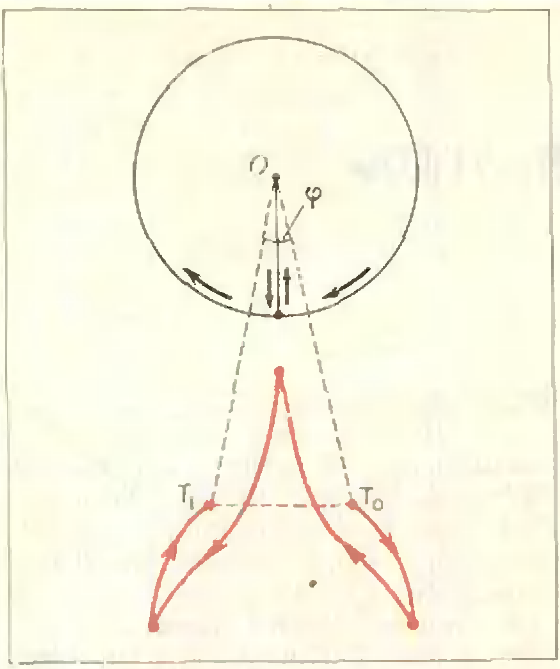


Рис. 12.

нацарапанной на чертеже). Одна из таких линий — линия погони *), возникающая при обводе круга, — показана на рисунке 12. Возвратившись в исходную точку O, отмечают новое положение T_1 лезвия. Чтобы определить теперь площадь обведенной фигуры, надо измерить в радианах угол $\varphi = \angle T_0OT_1$ между начальным и конечным положением планиметра и умножить его на l^2. Если угол невелик, то вместо него достаточно измерить хорду T_0T_1 и составить произведение $l \cdot T_0T_1$. Это правило можно получить из общей теории планиметра **). Оно означает, что планиметр-топорик не нуждается даже в измерительном колесике.

Действительно, предположим, что планиметр-топорик все же снабжен измерительным колесиком, насаженным на его конце (рядом с лезвием). Тогда при обводе границы фигуры F колесико будет только скользить, и потому поворот его окажется нулевым. Если, однако, колесико насадить в середине топорика, то поворот его составит $\frac{l}{2}\varphi$ (почему?). На такую же дугу $\frac{l}{2}\varphi$ повернется колесико при повороте стержня из положения OT_0 в OT_1, а всего — на $l\varphi$. Поэтому алгебраическая сумма площадей, обметенных планиметром, окажется равной $l^2\varphi$. Остается только заметить, что эта величина равна алгебраической сумме искомой площади S и площади s, ограниченной кривой погони (она замыкается поворотом планиметра на угол φ). Можно доказать, что если начальная точка O обвода расположена близко к центру тяжести F, то s близко к нулю, и формула (3) дает:

$$l^2\varphi = S.$$

Планиметр-топорик может легко изготовить каждый из вас. Но уже полярный планиметр требует высокой культуры производства, он измеряет площадь в десять раз точнее планиметра-топорика. Высокой точности (прецизионные) планиметры измеряют площадь в десять раз точнее, чем обычные (ошибка составляет лишь 0,0001 обводимой площади). В этих приборах измерительное колесико катится не по чертежу, который может иметь складки или другие неровности, а по специальному металлическому диску или линейке.

Примечание. Не всегда обход границы фигуры F сопровождается движением конца A по направляющей L строго в одном направлении и заканчивается ее полным обходом: движение против часовой стрелки может сменяться движением по часовой и наоборот. Все зависит от взаимного расположения и конфигурации F и L. В связи с этим рисунки 6, 7 и 8 являются сугубо схематичными.

---

*) По такой кривой должен бежать охотник за зайцем, если он, «поймав зайца на мушку», захочет в течение всей погони держать его под прицельным огнем и при этом не менять направления ружья относительно корпуса.

**) Элементарную геометрическую теорию планиметра-топорика привел академик А. Н. Крылов в 1904 году в статье «On the hatchet planimeter» (Собр. трудов. Т. V).

И. М. Яглом

Оценки углов

Исходной для нас будет служить следующая несложная, но поучительная

Задача 1. *Пусть A, B, C — три произвольные (несовпадающие) точки на плоскости; углы треугольника ABC (точнее, $\angle BAC$, $\angle ABC$ и $\angle ACB$) мы обозначим через α, β и γ. Пусть $\alpha \geqslant \gamma \geqslant \beta$. Какие значения могут принимать α, γ и β?*

Эта задача хорошо иллюстрирует тематику настоящей статьи: в ней обсуждается следующая (в общем виде не решенная до сих пор!)

Основная проблема. *На плоскости даны n точек A_1, A_2, ..., A_n. Обозначим через α_1, α_2, ..., α_N углы треугольников, образованных этими точками *). Пусть $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_N$. Какие значения могут принимать α_1, α_2, ..., α_N?*

Чтобы представить себе, с чем мы можем встретиться при решении основной проблемы, решим задачу 1.

Решение задачи 1

Так как $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ = 3 \cdot 60^\circ$, то наибольший из трех углов треугольника не может быть меньше 60°, а наименьший не может быть больше 60°: $\alpha \geqslant 60^\circ$, $\beta \leqslant 60^\circ$. При этом и α, и β могут быть равными 60° (рис. 1). С другой стороны, наибольший угол α может быть сколь угодно близок к 180° и может даже равняться 180°, если точки A, B и C лежат на одной прямой (рис. 2). Аналогично, наименьший угол β может быть сколь угодно близок к 0° и даже может равняться 0° (см. рис. 2). Наконец, «средний» угол γ тоже может быть равен 0° (см. рис. 2). С другой стороны, так как два угла треугольника долж-

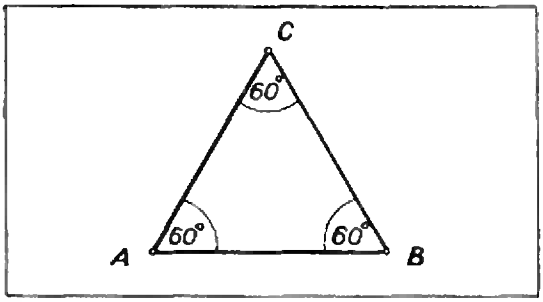


Рис. 1.

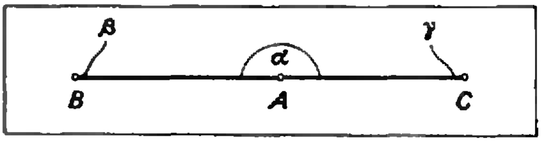


Рис. 2.

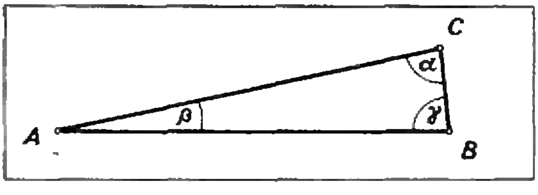


Рис. 3.

*) Число N, разумеется, зависит от n. Нетрудно видеть, что

$$N = 3C_n^3 = 3\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2},$$

где C_n^3 — число сочетаний из n по 3, но нам эта формула не понадобится.

ны быть острыми, то $\gamma < 90°$ (случай, когда три точки лежат на одной прямой, не спасет положения, поскольку при этом $\alpha = 180°$, $\beta = 0°$, $\gamma = 0°$). Однако γ может быть сколь угодно близким к 90° (на рисунке 3 наименьший угол $\beta = \angle BAC$ очень мал, а $\angle ABC = \angle ACB \approx 90°$). Таким образом,

$$60° \leqslant \alpha \leqslant 180°, \quad 0° \leqslant \gamma < 90°,$$
$$0° \leqslant \beta \leqslant 60°.$$

Чтобы завершить решение задачи 1 *), нам еще надо доказать, что α может принимать любое значение в пределах $60° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ (и аналогично для углов β и γ). Впрочем, эта часть решения очень проста — она сводится к *построению* треугольника ABC, у которого наибольший угол α (или «средний» угол γ, или наименьший угол β) имеет заданное значение, выбранное в указанных пределах; это вы легко сделаете сами.

Обсуждение решения задачи 1

Прежде всего изменим обозначения. Условимся обозначать вершины треугольника через A_1, A_2, A_3, а его углы — через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Наибольший из углов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ можно обозначить так:

$$\alpha = \max_i \alpha_i,$$

а наименьший из углов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ так:

$$\beta = \min_i \alpha_i,$$

причем $i = 1, 2, 3$.

max — это сокращение латинского слова *maximum* — «максимум», то есть наибольшее. Знак i под max показывает, что меняется i, то есть задан набор величин α_i (здесь — $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$), из которых мы берем наибольшую (а не, скажем, наибольший из вообще возможных углов треугольника $A_1A_2A_3$ — в этом случае мы напишем $\max\limits_{\Delta A_1A_2A_3} \alpha$). Знак $\max\limits_{\Delta A_1A_2A_3}$ обычно употребляется для наибольшей из конечного числа величин (здесь — из трех). Для наибольшей из бесконечного числа величин тоже можно применять знак max, но это опасно — здесь надо еще доказывать, что это наибольшая величина существует (см. далее).

min — сокращение латинского слова *minimum* — «минимум», то есть наименьшее.

В задаче 1 не вызывало никаких затруднений определение самого большого возможного значения α, то есть

$$\max_{\Delta A_1A_2A_3} \alpha = \max_{\Delta A_1A_2A_3} \max_i \alpha_i = 180°,$$

и самого малого возможного значения β, то есть

$$\min_{\Delta A_1A_2A_3} \beta = \min_{\Delta A_1A_2A_3} \min_i \alpha_i = 0°.$$

Наибольший интерес здесь представляло отыскание наименьшего возможного значения α, то есть

$$\min_{\Delta A_1A_2A_3} \alpha = \min_{\Delta A_1A_2A_3} \max_i \alpha_i = 60°,$$

и наибольшего возможного значения β, то есть

$$\max_{\Delta A_1A_2A_3} \beta = \max_{\Delta A_1A_2A_3} \min_i \alpha_i = 60°.$$

Постановка таких «минимаксных» задач характерна для современной «чистой» и (особенно!) прикладной математики.

Значительную часть задачи 1 также составляет оценка наибольшего возможного значения величины γ (наименьшее легко находится: из рисунка 2 следует, что $\min\limits_{\Delta A_1A_2A_3} \gamma = 0°$). Однако здесь нас подстерегает сюрприз: оказывается, что искомого наибольшего значения γ не существует: угол γ может быть сколь угодно близок к 90°, но он никогда не окажется равным 90°. Математики в таком случае говорят, что 90° — это (*точная*) *верхняя грань величины* γ:

$$\sup_{\Delta A_1A_2A_3} \gamma = 90°.$$

sup — это сокращение латинского слова *supremum* — «супремум», то есть высшее. Запись $\sup x_i = \xi$ означает, что $x_i \leqslant \xi$ для любого i, но x_i может быть сколь угодно

*) Мы приводим здесь подробное решение задачи 1. Указания к решению остальных задач помещены в конце журнала (но не торопитесь туда заглядывать — попробуйте сначала решить задачу самостоятельно). Звездочкой отмечены более трудные задачи; вопросительный знак у номера задачи означает, что решение автору не известно (откуда еще вовсе не следует, что эта задача — трудная; подумайте и над этими задачами).

близким к ξ, то есть ξ — наименьшее из чисел, не меньших чем любое x_i. Можно показать, что если величины x_i ограничены сверху, то есть существует хотя бы одна верхняя грань величин то среди этих верхних граней найдется наименьшая (*точная*), то есть $\sup x_i$ существует.

Аналогично употребляется запись $\inf x_i$. inf — это сокращение латинского слова *infimum* — «инфимум», то есть низшее.

$\inf x_i$ — это *точная нижняя грань*, то есть наибольшее из чисел, не превосходящих любого x_i. В тех случаях, когда это не вызывает затруднений при чтении, мы не будем писать i, $\Delta A_1A_2A_3$ и т. п. под знаками sup, inf, max, min.

Нетрудно понять, с чем связан этот сюрприз. Ясно, что величины $\max\limits_i \alpha_i$ и $\min\limits_i \alpha_i$ существуют — ведь из трех углов α_1, α_2 и α_3 всегда можно выбрать наибольший и наименьший. А число троек $\{A_1, A_2, A_3\}$ точек на плоскости является бесконечным. И здесь мы уже не можем ручаться за то, что найдется такая тройка, которой отвечает наибольшее значение угла γ. Ведь переходить от одной тройки точек к другой, которой отвечает большее значение угла γ, мы можем сколь угодно много раз, и при этом каждый раз может оказаться, что все равно осталась тройка, лучшая, чем все предыдущие.

В принципе, ни одна из величин $\sup\alpha$, $\sup\beta$, $\sup\gamma$, $\inf\alpha$, $\inf\beta$, $\inf\gamma$ не обязана достигаться — и мы должны расценить как удачу то обстоятельство, что величины $\sup\alpha = 180^\circ$, $\sup\beta = 60^\circ$, $\inf\alpha = 60^\circ$ и $\inf\beta = 0^\circ$ достигаются, то есть что существуют $\max\alpha$, $\max\beta$, $\min\alpha$ и $\min\beta$. Для величины γ, как мы видели, $\inf\gamma = 0^\circ$ достигается, а $\sup\gamma = 90^\circ$ — нет.

Аналогично этому, скажем, для величины $\frac{1}{n}$, где n — натуральное число, $\sup\limits_n \frac{1}{n} = 1$ достигается (при $n = 1$), а $\inf\limits_n \frac{1}{n} = 0$ — нет; таким образом, величина $\frac{1}{n}$ имеет максимум и не имеет минимума.

Рассмотрим, наконец, вопрос о том, для каких именно троек точек $P_3 = \{A_1, A_2, A_3\}$ (или $\{A, B, C\}$) достигается максимум или минимум величин α, β и γ. Легко видеть, что $\min\alpha$ и (одновременно) $\max\beta$ достигаются для единственной тройки точек — для вершин правильного треугольника ABC (см. рис. 1) конечно, с точностью до замены треугольника ABC подобным, что, впрочем, не меняет ни одного из его углов. $\max\gamma$, как мы уже знаем, вообще не существует. А величины $\max\alpha$, $\min\beta$ и $\min\gamma$ реализуются бесконечным множеством разных (даже не подобных) троек точек, — ведь средняя точка на рисунке 2 может располагаться в любом месте на отрезке, соединяющем две другие точки.

Теперь мы перейдем к другим задачам.

Задачи, связанные с основной проблемой

Задача 2. а) *Пусть* $P_4 = \{A, B, C, D\}$ — *произвольная система четырех точек на плоскости; величину наименьшего из 12 углов, определяемых эт и точками, обозначим через* β. *Док. жите, что* $0^\circ \leqslant \beta \leqslant 45^\circ$.

б) *Пусть* P_5 — *произвольная система пяти точек на плоскости: наименьший из углов, определяемых этими точками, обозначим через* β. *Докажите, что* $0^\circ \leqslant \beta \leqslant 36^\circ$.

в) *Пусть* P_6 — *произвольная система шести точек на плоскости; наименьший из определяемых этими точками углов обозначим через* β. *Докажите, что* $0^\circ \leqslant \beta \leqslant 30^\circ$.

Для каких систем из четырех, пяти и шести точек на плоскости достигаются наибольшее и наименьшее значение угла β?

Начало решения задачи 2. Предположим, что рассматриваемые точки — это вбитые в зем-

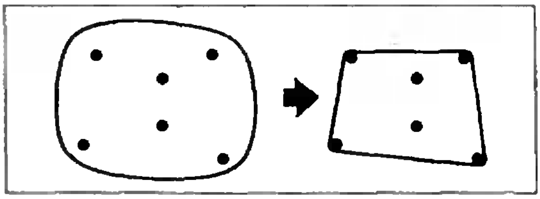


Рис. 4.

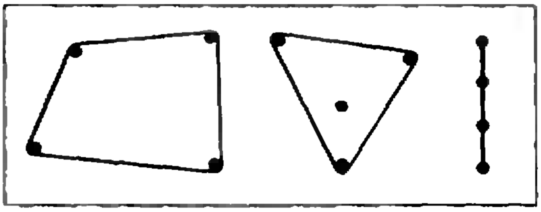


Рис. 5. Рис. 6. Рис. 7.

лю колышки (или вбитые в фанерный лист гвозди); набросим на все эти колышки растянутую резинку и дадим ей сократиться, обтянув колышки (рис. 4). Тогда резинка примет форму выпуклого многоугольника — наименьшего выпуклого многоугольника, содержащего внутри себя (или на границе) все заданные точки. Этот многоугольник называется **выпуклой оболочкой** рассматриваемой системы точек; его вершины совпадают с какими-то из этих точек.

Выпуклая оболочка четырех точек может представлять собой четырехугольник (рис. 5), треугольник (рис. 6) или «двуугольник», то есть отрезок (рис. 7); оценить в каждом случае, каким может быть наименьший из углов, образованных заданными точками, мы предоставим читателю.

Задачи 2а и 2б предлагались учащимся 9-х и 10-х классов на первом туре XXVI Московской школьной математической олимпиады (1963 год); у этих задач оказалось довольно много решений.

Если вам удастся решить задачу 2, то, вероятно, у вас не вызовет особых затруднений и следущая (не особенно трудная)

Задача 3. *На плоскости дано n различных точек; обозначим через β наименьший из углов, определяемых этими точками. Докажите, что*

$$0^\circ \leqslant \beta \leqslant \frac{180^\circ}{n}.$$

Для каких систем из n точек на плоскости угол β принимает наименьшее возможное значение 0° и для каких — наибольшее возможное значение $\frac{180^\circ}{n}$?

Попробуем теперь оценить **наибольший** из углов, определяемых n точками.

Задача 4. а) *На плоскости даны 4 (различные) точки; обозначим через α наибольший из углов, определяемых этими точками. Докажите, что $90^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$.*

б) *На плоскости дано 5 точек; обозначим через α наибольший из углов, определяемых этими точками. Докажите, что $108^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$.*

в) *На плоскости дано 6 точек; обозначим через α наибольший из углов, определяемых этими точками. Докажите, что $120^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$.*

Для каких систем из четырех, пяти и шести точек на плоскости достигаются наибольшее и наименьшее значения угла α?

Задача 4 по трудности не превосходит близкую к ней по содержанию задачу 2. Сравнение этих двух задач позволяет усмотреть лишь одно различие между ними, которое можно воспринять как сигнал о том, что задачи об оценке наименьшего угла β и наибольшего угла α могут расходиться по характеру ответов и по трудности решения: в то время как в задачах 2—3 наибольшее значение наименьшего угла β всегда реализуется для **единственной** системы точек, в задаче 4 наименьшее значение угла α достигается для бесконечного множества разных (то есть не подобных) систем точек. Игнорировать этот «сигнал» не следует; действительно, следующая задача уже совсем не похожа на простые задачи 2—3: она гораздо труднее их.

Задача 5*. а) *На плоскости даны 7 точек ; пусть α — наибольший из углов, задаваемых этими точками. Докажите, что $120^\circ < \alpha \leqslant 180^\circ$, но что для любого угла φ, большего 120° (например, для $\varphi = 120^\circ 1''$), можно подобрать 7 точек так, что все задаваемые этими точками углы будут меньше φ (другими словами, докажите, что $\inf \alpha = 120^\circ$, но $\min \alpha$ не существует).*

б) *Докажите, что для систем из 8 точек на плоскости сохраняет силу* *тот же результат, что и для систем из 7 точек (то есть что здесь также* $\inf \alpha = 120°$, *и* $\min \alpha$ *не существует).*

Обратимся снова к фигурирующим в основной проблеме «общим» системам $P_n = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ из n точек на плоскости; наибольший из углов, определяемых этими точками, мы обозначим через α, а наименьший — через β. Так как, очевидно, наибольшее возможное значение α равно 180°, а наименьшее значение β равно 0°, то задача оценки углов α и β сводится к нахождению $\sup \beta$ (эту величину мы обозначим через $\overline{\beta}$ или поскольку она, разумеется, зависит от n, — через $\overline{\beta}(n)$) и $\inf \alpha$ (эту величину мы будем обозначать через $\underline{\alpha}$ или $\underline{\alpha}(n)$). Найти величину $\overline{\beta}(n)$ несложно:

$$\overline{\beta}(n) = \frac{180°}{n},$$

и эта величина всегда достижима (см. задачу 3). Однако задача нахождения величины $\underline{\alpha}(n)$ не так проста и в общем виде до сих пор еще не решена. Задачи 4 и 5 утверждают, что $\underline{\alpha}(4) = 90°$, $\underline{\alpha}(5) = 108°$ и $\underline{\alpha}(6) = \underline{\alpha}(7) = \underline{\alpha}(8) = 120°$; при этом значения $\underline{\alpha}(4)$, $\underline{\alpha}(5)$ и $\underline{\alpha}(6)$ достижимы, а значения $\underline{\alpha}(7)$ и $\underline{\alpha}(8)$ уже недостижимы.

Задачу определения величины $\underline{\alpha}(n)$ впервые поставил американский геометр Л. Блюменталь; ее решением занимались венгерские математики П. Эрдеш*) и Г. Секереш. П. Эрдеш предположил, что для всех $n \geqslant 6$

$$\underline{\alpha}(n) = \frac{k-1}{k} \cdot 180°, \text{ где } 2^{k-1} \leqslant n \leqslant 2^k,$$

и что достигается это значение $\underline{\alpha}(n)$ лишь при $n = 6$. Однако доказано до сих пор лишь, что

$$\underline{\alpha}(2^k) = \frac{k-1}{k} \cdot 180° \text{ при } k \geqslant 2$$

и что если $2^{k-1} < n < 2^k$ (где $k \geqslant 3$), то

$$\frac{k-1}{k} \cdot 180° \geqslant \underline{\alpha}(n) > \frac{k-2}{k-1} \cdot 180°$$

(последняя оценка может быть даже слегка усилена).

Обратимся теперь к остальным углам, фигурирующим в проблеме.

Задача 6. *Пусть P_4 — произвольная система четырех точек на плоскости;* $\alpha = \alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(2)}$ — *два самых больших из двенадцати углов, задаваемых этими точками, а* $\beta = \beta^{(1)}$ и $\beta^{(2)}$ — *два самых маленьких угла; при этом* $\alpha^{(1)} \geqslant \alpha^{(2)}$, $\beta^{(1)} \leqslant \beta^{(2)}$. *Докажите, что*

а) $72° \leqslant \alpha^{(2)} \leqslant 180°$;
б) $0° \leqslant \beta^{(2)} \leqslant 45°$.

Для каких систем точек реализуются наибольшее и наименьшее значения углов $\alpha^{(2)}$ и $\beta^{(2)}$?

Задача 7. *Докажите, что при всех* $n \geqslant 2$ $\max \alpha(i) = 180°$ *при*

$$1 \leqslant i \leqslant \frac{n(n-1)(n-2)}{6},$$

и $\min\limits_{P_n} \alpha^{(j)} = 0°$ *при*

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} < j \leqslant N = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}.$$

Таким образом вопрос об оценках всех N углов $\alpha^{(i)}$ сводится к определению величин $\inf\limits_{P_n} \alpha^{(i)}$, где

$$1 \leqslant i \leqslant \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

($\inf \alpha^{(i)}$ можно обозначить символом $\underline{\alpha}^{(i)}(n)$) и $\sup \beta^{(j)}$ при

$$1 \leqslant j \leqslant \frac{n(n-1)(n-2)}{3}\ ^{*)}$$

*) Пал Эрдеш — видный современный венгерский математик. Эрдешу принадлежат многие яркие результаты в разных областях математики (теория чисел, математический анализ, теория вероятностей, геометрия и т. д.); однако в результате его деятельности число нерешенных до сих пор задач лишь увеличилось, ибо он поставил больше новых задач, чем решил старых.

*) Заметьте, что $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2} = N$. Укажем еще, что число подлежащих определению величин $\overline{\beta}^{(i)}$ всегда вдвое больше числа интересующих нас чисел $\underline{\alpha}^{(i)}$, например: 2 и 1 при $n = 3$, 8 и 4 при $n = 4$ и т. д.

($\sup \beta^{(i)}$ можно обозначить символом $\overline{\beta}^{(i)}(n)$). Так, если $n=3$, то необходимо найти три числа $\alpha^{(1)}(3)=\underline{\alpha}(3)$, $\overline{\beta}^{(1)}(3)=\overline{\beta}(3)$ и $\overline{\beta}^{(2)}(3)$; мы знаем, что эти числа равны 60°, 60° и 90°, и что первые два из них достижимы, а третье — нет (см. задачу 1). При $n=4$ требуется определить уже 12 чисел: $\underline{\alpha}^{(1)}(4)=\underline{\alpha}(4)$, $\underline{\alpha}^{(2)}(4)$, ... и $\overline{\beta}^{(1)}(4)=\overline{\beta}(4)$, $\overline{\beta}^{(2)}(4)$, ..., $\overline{\beta}^{(6)}(4)$; из них нам пока известны $\underline{\alpha}^{(1)}=\underline{\alpha}=90^\circ$, $\underline{\alpha}^{(2)}=72^\circ$ и $\overline{\beta}^{(1)}=\overline{\beta}^{(2)}=45^\circ$, причем все эти значения достижимы (см. задачи 2а, 4а и 6). Однако общий вопрос об определении N чисел $\underline{\alpha}^{(i)}(n)$ и $\overline{\beta}^{(i)}(n)$ является достаточно сложным, поскольку пока нам не известны даже величины $\underline{\alpha}^{(1)}(n)=\underline{\alpha}(n)$.

Задача 8?. *Пусть P_4 — система четырех точек на плоскости. Определите* $\inf \alpha^{(3)}$ $(=\underline{\alpha}^{(3)}(4))$ *и* $\sup \beta^{(3)}$ $(=\overline{\beta}^{(3)}(4))$. *Достигаются ли значения* $\underline{\alpha}^{(3)}(4)$ *и* $\overline{\beta}^{(3)}(4)$?

Задача 9?. *Определите величины* $\underline{\alpha}^{(2)}(5)$ *и* $\overline{\beta}^{(2)}(5)$.

Задача 10?. *Что еще вы можете сказать об оценках углов* $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(N)}$?

(Простота точной оценки возможных значений последнего угла $\alpha^{(N)}=\beta$ заставляет попытаться оценить возможные значения «предпоследнего» угла $\alpha^{(N-1)}=\beta^{(2)}$; при этом целесообразно начинать с небольших значений n.)

Точки в пространстве

Разумеется, задачи об оценках углов имеют смысл и в стереометрии. Пусть P_n — произвольная система n точек в пространстве (эта постановка не запрещает всем точкам лежать в одной плоскости). Условимся обозначать греческими буквами $\varphi=\varphi^{(1)}$ наибольший из всех задаваемых этими точками углов и $\psi=\psi^{(1)}$ — наименьший. Заметим сразу же, что результат задачи 7 полностью сохраняет силу и для рассматриваемой стереометрической задачи, так что здесь также требуется определить $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ величин

$$\inf_{P_n} \varphi^{(i)}=\underline{\varphi}^{(i)} \quad \text{и} \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$$

величин $\sup \psi^{(i)}=\overline{\psi}^{(i)}$.

Задача 11. *Пусть P_4 — произвольная система четырех точек в пространстве, φ — наибольший из определяемых этими точками углов, а ψ — наименьший угол. Докажите, что*

а) $60^\circ \leqslant \varphi \leqslant 180^\circ$ (так что $\underline{\varphi}^{(1)}(4)=\underline{\varphi}(4)=60^\circ$);

б) $0^\circ \leqslant \psi \leqslant 60^\circ$ (так что $\overline{\psi}^{(1)}(4)=\overline{\psi}(4)=60^\circ$).

Для каких расположений четырех точек пространства достигаются значения $\varphi=60^\circ$ и $\psi=60^\circ$?

Задача 12? *Для того же случая четырех точек в пространстве найдите наименьшее возможное значение $\underline{\varphi}^{(2)}(4)$ второго по величине угла $\varphi^{(2)}$ и наибольшее возможное значение $\overline{\psi}^{(2)}(4)$ предпоследнего по величине $\psi^{(2)}$* *).

Задача 13? *Для случая пяти точек пространства найдите наименьшее возможное значение $\underline{\varphi}(5)$ самого большого угла φ и наибольшее возможное значение $\overline{\psi}(5)$ самого малого угла ψ**).

Задача 14?. *Что еще вы можете сказать об оценках углов $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(N)}$, задаваемых n точками в пространстве?*

В заключение укажем еще, что «задачи об оценках углов» можно ставить и несколько иначе. Мы во всех случаях считали число n точек плоскости или пространства заданным — и при этих условиях стремились оценить те или иные из углов $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(N)}$ или $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(N)}$. Однако такую постановку задачи мож-

*) Разумеется, если, скажем, $\min \varphi^{(2)}$ не существует, то потребуется определить $\inf \varphi^{(2)}$ $(=\underline{\varphi}^{(2)}(4))$. Это относится и к задаче 13.

но и «обратить» — заранее задать ту или иную оценку для (одного или нескольких) углов $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(N)}$ или $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(N)}$ и поставить вопрос о том, при каком числе n точек плоскости или пространства эти оценки могут быть удовлетворены. Мы ограничимся здесь лишь двумя примерами подобной постановки задачи, принадлежащими, видимо, все тому же Палу Эрдешу.

Задача 15. *При каком числе n точек*

а) *на плоскости*,

б) *в пространстве*

их можно расположить так, что все образуемые этими точками углы будут не больше $90°$?

Задача 16. *При каком числе n точек*

а) *на плоскости*

б)* *в пространстве*

их можно расположить так, что все образуемые этими точками углы будут меньше $90°$?

Таким образом, в задаче 15 требуется расположить точки так, чтобы все углы $\alpha^{(i)}$ или $\varphi^{(i)}$ были не больше $90°$; в задаче 16 нестрогое неравенство заменяется строгим. П. Эрдеш указал решения простых задач 15а и 16а и высказал предположения об ответах к задачам 15б и 16б. Задача 15б впервые была решена в 1962 году известными математиками Л. Данцером и Б. Грюнбаумом; впоследствии то же решение нашел студент МГУ, член жюри Всесоюзных математических олимпиад Гриша Гальперин. Задачу 16б впервые решил в 1961 году английский математик Г. Крофт; в 1963 году несколько более простые ее решения нашли тот же Б. Грюнбаум и немецкий математик К. Шютте.

Максимум?

Иногда бывает интересно не только решать нерешенную задачу, но и найти лучшее решение той, которая, казалось, была уже решена. Вот одна такая задача.

Возьмем цифры от 1 до 9 и разделим их на четыре группы: в первой группе — три цифры, а в остальных — по две. Зафиксировав порядок цифр в этих группах, мы получим четыре числа. Перемножим теперь трехзначное число на одно из двухзначных а два оставшиеся двухзначных числа между собой. Например:

$$\begin{array}{r} 158 \\ 23 \\ \hline 474 \\ 316 \\ \hline 3634 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 79 \\ 46 \\ \hline 474 \\ 316 \\ \hline 3634 \end{array}$$

В обоих случаях произведение равно 3634.

Так вот, нужно распределить те же 9 цифр по той же схеме (с равными произведениями), но получить при этом наибольшее возможное произведение.

Долгое время наибольшим было произведение $174 \times 32 = 96 \times 58 = 5568$, но затем оно было улучшено, и максимальным стало считаться произведение $584 \times 12 = 96 \times 73 = 7008$.

Этот результат держался до 1971 года, когда в Японии было найдено новое рекордное решение этой задачи. По-видимому, оно окажется последним, хотя это еще не доказано. Попробуйте найти, чему равно это последнее рекордное произведение или увеличить его.

В. Б.

Г. Б. Куперман,
Е. Д. Щукин

Механические свойства кристаллов

Такие свойства твердых тел как упругость, прочность, поверхностное натяжение определяются силами взаимодействия между атомами и строением кристаллов (типом кристаллической решетки). Изучая силы межатомного взаимодействия, можно, например, определить величину модуля упругости, предела прочности материала, энергии связи кристалла и коэффициента поверхностного натяжения.

Таким образом оцениваются характеристики любых твердых тел, но проще всего это сделать для идеальных ионных кристаллов. В решетке таких кристаллов периодически чередуются положительные и отрицательные ионы.

Для оценки прежде всего необходимо выяснить величину силы единичной межатомной связи, которая в ионных кристаллах определяется силой взаимодействия между двумя ионами.

Силы межатомного взаимодействия

Зависимость сил межатомного взаимодействия *) от расстояния между центрами атомов в твердых телах схематически показана на рисунке 1.

По этому рисунку можно судить о некоторых особенностях сил межатомного взаимодействия.

1. Между атомами одновременно действуют силы притяжения и силы отталкивания. Результирующая сила межатомного взаимодействия — сумма этих двух сил.

2. При уменьшении расстояния между атомами силы отталкивания нарастают значительно быстрее, чем силы притяжения; поэтому существует некоторое расстояние r_0, при котором силы притяжения и силы отталкивания уравновешиваются и результирующая сила становится равной нулю. В кристалле, предоставленном самому себе, ионы располагаются именно на расстоянии r_0 друг от друга. Если расстояние между атомами меньше равновесного ($r < r_0$), то преобладают силы отталкивания, если $r > r_0$, то преобладают силы притяжения.

Эти свойства межатомных сил позволяют условно рассматривать частицы, образующие кристалл (например, ионы Na и Cl в кристалле поваренной соли), как твердые упругие шары, взаимодействующие друг с другом. Деформация растяжения кристалла приводит к увеличению расстояния между центрами соседних шаров и преобладанию сил притяжения, а деформация сжатия — к уменьшению этого расстояния и преобладанию сил отталкивания.

Прочность при растяжении

Пределом прочности обычно называют наибольшее напряжение *), которое

*) Подробнее о силах межатомного взаимодействия можно прочитать в статье: Мякишев Г. Я. Взаимодействие атомов и молекул. «Квант», 1971, № 11.

*) Напряжение материала — это упругая сила, действующая на единицу площади сечения, перпендикулярного этой силе.

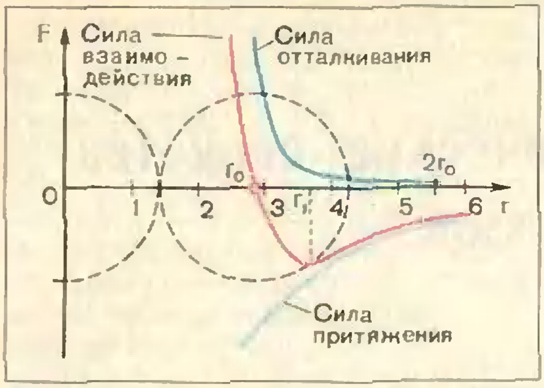


Рис. 1.

может выдержать материал, не разрушаясь. При растяжении образца предел прочности определяется максимальной величиной результирующей силы межатомного притяжения, приходящейся на единицу площади сечения, перпендикулярного направлению растяжения.

Результирующая сила межатомного взаимодействия достигает максимального значения, когда центры атомов находятся на расстоянии r_1 друг от друга (см. рис. 1). Когда растяжение еще более увеличивается, силы взаимодействия становятся настолько малыми, что связи между атомами разрываются.

Обозначим величину наибольшей силы притяжения между двумя атомами (то есть величину силы единичной связи) через F_{max}, а число связей на единице площади сечения, перпендикулярного направлению внешней силы, через $N_{св}$. Тогда предел прочности кристалла

$$\sigma = F_{max} N_{св}.$$

На рисунке 2 показана простейшая модель ионного кристалла поваренной соли (NaCl состоит из положительных ионов натрия и отрицательных ионов хлора). У каждого иона в этом кристалле шесть ближайших соседей с противоположным знаком заряда. При разрыве такого кристалла у каждого атома обрывается по одной связи. Разрыв кристалла схематически изображен на рисунке 3. В рассматриваемой модели число связей, разрываемых на каждом квадратном сантиметре, равно числу атомов, приходящихся на эту площадь ($N_{св} = N_{ат}$). Для простоты мы пренебрегаем взаимодействием между ионами, находящимися друг от друга на расстояниях, больших r_0 (остальные ионы удалены на расстояния не меньше, чем $r_0\sqrt{2}$). Эти взаимодействия дают относительно небольшую поправку. Для оценки предела прочности σ достаточно умножить наибольшее значение силы взаимодействия между двумя атомами на число атомов, приходящихся на единицу площади в плоскости разрыва:

$$\sigma = F_{max} N_{ат}.$$

Оценка величины сил связи

Порядок величины сил связи в ионных кристаллах можно найти, исходя из предположения, что ионы взаимодействуют по закону Кулона. В нашей модели кристалл состоит из чередующихся ионов противоположных знаков, равновесные расстояния меж-

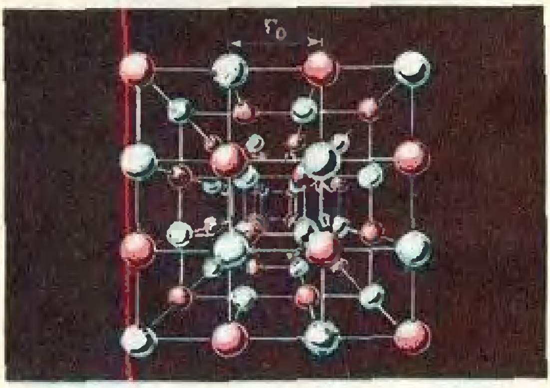


Рис. 2.

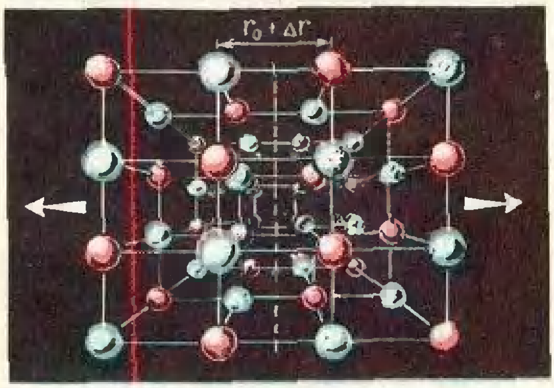


Рис. 3.

ду которыми $r_0 \approx 3$ Å *). Предположим, что деформация остается упругой вплоть до деформации, соответствующей разрыву; иначе говоря, наибольшей упругой деформации соответствует напряжение, равное пределу прочности. Но максимальной упругой деформации приблизительно соответствует максимальное значение силы межатомного притяжения (см. рис. 1).

Опыты с самыми прочными кристаллами показали, что их максимальная относительная упругая деформация ε_{max} **) перед разрушением обычно не превышает 10—20%. Положим $\varepsilon_{max} = \frac{1}{6} \approx 17\%$. Этой относительной деформации соответствует смещение атомов от положения равновесия на расстояние $\Delta r = \varepsilon r_0 = \frac{1}{6}\,3\text{Å} = 0{,}5\text{Å}$. Таким образом, при подсчете сил межатомного притяжения для рассматриваемой модели кристалла за расстояние между ионами следует брать величину

$$r = r_0 + \Delta r = 3\text{Å} + 0{,}5\ \text{Å} = 3{,}5\ \ \text{Å}.$$

Если учесть, что заряд каждого иона по величине равен заряду электрона, то есть $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ к$, то максимальное значение силы притяжения между двумя атомами будет равно

$$F_{max} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19})^2}{(3{,}5 \cdot 10^{-10})^2} \approx$$

$$\approx 2 \cdot 10^{-9}\,(н).$$

Таково по порядку величины значение единичной силы межатомной связи.

Прочность кристалла

Оценим примерное число атомов, приходящихся на единицу поверхности разрыва кристалла.

---

*) Для кристалла NaCl это расстояние равно 2,814 Å (1 Å = 10^{-10} м).

**) Относительная деформация ε при растяжении равна отношению абсолютной деформации тела к длине этого тела в нормальном состоянии.

Диаметр иона равен приблизительно расстоянию между соседними ионами. Мы считали это расстояние равным 3 Å, тогда число атомов на каждом квадратном метре поверхности разрыва кристалла

$$N_{ат} \sim \frac{1}{(3 \cdot 10^{-10})^2} \approx 10^{19}\left(\frac{1}{м^2}\right).$$

В нашей модели кристалла число связей, проходящих через единицу площади, равно числу атомов ($N_{св} = N_{ат}$), значит, $N_{св} \approx \approx 10^{19}\ м^{-2}$.

Теперь можно оценить теоретическую величину предела прочности кристаллов:

$$\sigma \approx 2 \cdot 10^{10}\ н/м^2.$$

Оценка величины модуля упругости

Если известны значения единичной межатомной связи и, следовательно, предела прочности кристаллов, то можно оценить величину модуля упругости.

По закону Гука в пределах упругой деформации напряжение пропорционально растяжению. Коэффициент пропорциональности между величиной деформации ε и напряжением σ (модуль упругости)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

Так как величина прочности по нашей оценке

$$\sigma \approx 2 \cdot 10^{10}\ \ н/м^2,$$

а максимальная упругая деформация $\varepsilon_{max} \approx \frac{1}{6}$, то модуль упругости

$$E = \frac{2 \cdot 10^{10} \cdot 6}{1} \approx 10^{11}\left(\frac{н}{м^2}\right).$$

Результат расчета по порядку величины соответствует экспериментальным данным. Например, модуль упругости стали $2 \cdot 10^{11}\ н/м^2$, алюминия $0{,}7 \cdot 10^{11}\ н/м^2$, каменной соли — $0{,}4 \cdot 10^{11}\ \ н/м^2$.

Оценка величины энергии связи

Зная величину единичной силы межатомной связи, можно найти величину энергии взаимодействия двух атомов. Энергия связи двух атомов определяется работой, необходимой для удаления этих атомов друг от друга на такое расстояние, при котором силы взаимодействия исчезающе малы. Это расстояние (см. рис. 1) примерно равно $2r_0$.

Для упрощения будем считать среднее значение силы взаимодействия при изменении расстояния от r_0 до $2r_0$ равным $\frac{1}{2}F_{\max}$. Тогда энергия связи (в расчете на одну связь) равна

$$W_1 = A = F\cdot l \approx F_{\text{ср}}(2r_0 - r_0) \approx$$
$$\approx \frac{F_{\max}}{2}\cdot r_0 = \frac{2\cdot 10^{-9}}{2}\cdot 3\cdot 10^{-10} =$$
$$= 3\cdot 10^{-19} (\textit{дж}).$$

Интересно сравнить полученное значение потенциальной энергии взаимодействия частиц в твердом теле (энергии связи) с кинетической энергией их теплового движения, определяемой в среднем величиной kT. При комнатной температуре

$$W_{\text{к}} \sim kT = 1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 300 \approx$$
$$\approx 4\cdot 10^{-21} \quad (\textit{дж}).$$

Видно, что $W_1 \gg W_{\text{к}}$, то есть в твердом теле энергия межатомного взаимодействия много больше энергии теплового движения.

По известному значению энергии одной связи найдем энергию связи кристалла, то есть энергию, которую необходимо затратить, чтобы разделить кристалл на отдельные атомы, и сравним полученную величину с экспериментальными значениями. На опыте величина энергии связи кристаллического вещества — это теплота испарения твердого тела.

Энергия связи одного моля вещества равна

$$W_{\text{св}} = W_1 N' N_A,$$

где W_1 — энергия одной связи, N' — число связей, приходящихся на один атом, N_A — число Авогадро.

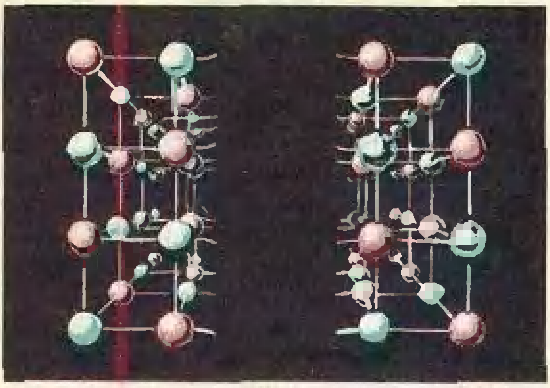


Рис. 4.

В рассматриваемой простейшей решетке (см. рис. 2) на каждый атом приходится по одной связи. Следовательно, величина энергии связи

$$W_{\text{св}} = 3\cdot 10^{-19}\cdot 1\cdot 6{,}02\cdot 10^{23} \approx$$
$$\approx 18\cdot 10^4 \left(\frac{\textit{дж}}{\textit{моль}}\right) \approx 40 \left(\frac{\textit{ккал}}{\textit{моль}}\right).$$

Это значение близко к найденным экспериментально значениям энергии связи различных кристаллов (несколько десятков килокалорий на моль).

Вычисление поверхностного натяжения

Пользуясь рассмотренной моделью, можно оценить и величину удельной поверхностной энергии — коэффициент поверхностного натяжения. Эта величина равна энергии, которой обладает единица поверхности на границе вещества $\left(\alpha = \frac{W}{S}\right)$. При разрыве кристалла сечения S образуется новая поверхность площадью $S_1 = 2S$ (рис. 4). Энергия связи единицы поверхности плоскости разрыва твердого тела равна $W' = W_1 \times \times N_{\text{св}}$, где W_1 — энергия одной связи, а $N_{\text{св}}$ — число связей, приходящихся на один квадратный метр. Эта энергия принадлежит как слою атомов, лежащему с одной стороны плоскости разрыва, так и слою, лежащему с другой стороны.

Поверхностное натяжение

$$\alpha = \frac{W}{S_1} = \frac{W' S N_{св}}{2S} = \frac{W' N_{св}}{2} = \frac{3 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{19}}{2} = 1{,}5\left(\frac{дж}{м^2}\right).$$

У кристалла NaCl $\alpha \approx 0{,}35$ *дж/м²*.

Рассматривая взаимодействие между ионами, мы смогли оценить порядок величины предела прочности, модуля упругости, энергии связи, коэффициента поверхностного натяжения. Таким образом, мы убедились, что силы взаимодействия между ионами кристаллической решетки, то есть силы, действующие в «микромире», определяют макроскопические свойства твердых тел.

Можно поступить и наоборот — по найденным экспериментально характеристикам механических свойств кристаллов определить величину сил межатомного взаимодействия. Оцените, например, величину сил межатомного взаимодействия по известному значению модуля упругости $E = 10^{11}$ *н/м²*.

Оценки, которые мы проводили, делались в предположении, что рассматриваемый кристалл имеет идеальную структуру решетки. У реальных кристаллов правильность решетки нарушается. Учет этого факта значительно усложняет теоретические расчеты характеристик физических свойств кристаллов. Некоторые из сделанных нами оценок для идеальных кристаллов значительно расходятся с данными, получаемыми из экспериментов.

Стакан воды

Какой стакан устойчивее — до краев полный воды или наполовину пустой?

Если у вас есть два совершенно одинаковых по форме предмета, то более устойчивым будет тот, у которого ниже центр тяжести. Это вы, наверное, знаете. Поэтому, чтобы сделать устойчивее наполненный водой стакан, достаточно отпить из него несколько глотков. При этом центр тяжести, который раньше находился в центре стакана, опустится. Сколько же нужно оставить в стакане воды, чтобы его положение было наиболее устойчивым?

Ведь, если выпить всю воду, то центр тяжести окажется на прежнем месте (дно мы будем считать невесомым). Значит, в какой-то момент центр тяжести занимал самое низкое положение. Как, зная вес пустого и полного стаканов, определить, каким должен быть уровень воды в наиболее устойчивом стакане?

Те, кто знакомы с высшей математикой, вероятно уже сообразили, что для решения достаточно выразить высоту центра тяжести стакана через положение уровня воды в нем, а затем, продифференцировав эту функцию, приравнять производную нулю и найти таким образом минимум. Однако существует и более простое решение этой задачи без всякой высшей математики. Попробуйте найти его.

В. Б.

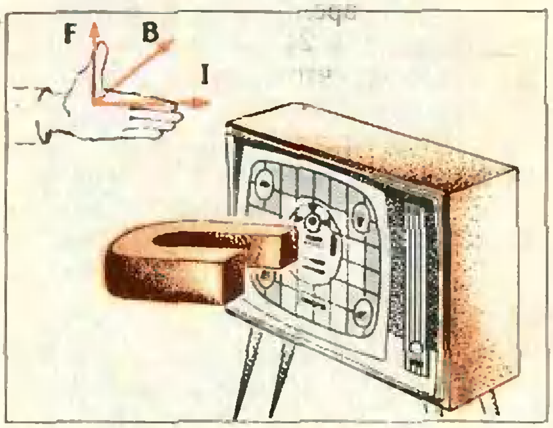
Как определить полюса магнита?

Б. И. Алейников

Вопрос этот совсем не такой простой, каким кажется с первого взгляда. Ведь у нас нет никакой уверенности в том, что полюса магнита не раскрасили в различные цвета просто, чтобы их различать, то есть без связи с их истинным магнетизмом. Кроме того, магнит может быть вообще не маркирован.

Для опыта нужны две вещи — постоянный подковообразный магнит, не обязательно раскрашенный в два цвета (даже интереснее, если полюса магнита заранее не размечены), и ... телевизор. Опыт лучше производить утром или днем, когда по телевидению передают сетку для настройки телевизоров.

Поднесем магнит к экрану включенного телевизора так, как показано на рисунке. Изображение немедленно исказится. В центре сетки имеется маленький кружок. Он заметно сместится вверх или вниз, в зависимости от того, как расположены полюса магнита.



Изображение на экране телевизора создает электронный луч, идущий из глубины трубки на зрителя. Наш магнит отклоняет движущиеся электроны, поэтому изображение смещается. Направление действия магнитного поля на движущийся заряд определяется по правилу левой руки. Нужно расположить ладонь так, чтобы силовые линии входили в нее, а вытянутые пальцы указывали направление тока; тогда отогнутый под углом 90° большой палец укажет направление смещения движущегося заряда. Силовые линии идут от северного к южному полюсу магнита. А направлением тока в правиле левой руки считается «техническое» направление — от плюса к минусу. Так двигались бы положительные заряды. Но в кинескопе движутся электроны, причем летят они на нас. Это эквивалентно тому, что положительные заряды летят от нас. Поэтому вытянутые пальцы левой руки должны быть направлены в экран. Остальное понятно. По смещению центрального кружочка телевизионной сетки определяем, какой полюс магнита поднесен к экрану, северный или южный. Итак, с помощью телевизора можно легко и быстро определять расположение полюсов немаркированного магнита.

Телевизор может помочь и при определении знака полюсов немаркированной батареи. Для этого опыта необходимо иметь батарею, электромагнит с дугообразным сердечником, телевизор, сопротивление, проводник.

Подключим к батарее последовательно электромагнит и сопротивление, подобранное с таким расчетом, чтобы ток не превышал допустимого. Поднося электромагнит к экрану телевизора, определим по правилу левой руки его полюса. Далее по правилу буравчика найдем направление тока и, следовательно, знаки полюсов батареи.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Окрестность фигуры

Ю. И. Ионин,
Л. Д. Курляндчик

Разберем две геометрические задачи.

Задача 1. *В прямоугольник* 20×25 *бросили* 120 *единичных квадратов. Доказать, что в прямоугольник можно поместить круг радиуса* $^1/_2$, *не пересекающейся ни с одним из квадратов.*

Выясним, где может находиться центр круга радиуса $^1/_2$, не пересекающегося с данным единичным квадратом. Геометрическим местом точек, удаленных от квадрата не более чем на $^1/_2$, является фигура, изображенная на рисунке 1 (расстоянием от точки до фигуры называется расстояние до ближайшей точки этой фигуры). Следовательно, центр круга радиуса $^1/_2$, не пересекающего с квадратом, расположен вне изображенной на рисунке 1 фигуры, которую мы назовем $\frac{1}{2}$-окрестностью квадрата. Построим $\frac{1}{2}$-окрестность для каждого из данных 120 единичных квадратов. Центр искомого круга должен лежать вне этих окрестностей. Кроме того, чтобы круг оказался внутри прямоугольника, его центр должен принадлежать меньшему прямоугольнику 19×24, который получится, если сдвинуть каждую сторону исходного прямоугольника внутрь на $\frac{1}{2}$.

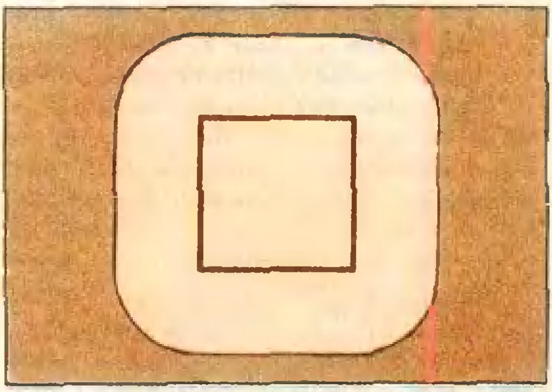


Рис. 1.

Задача будет решена, если удастся доказать, что построенные 120 окрестностей не покрывает полностью меньший прямоугольник.

Оценим площадь, покрываемую этими окрестностями. Каждая окрестность состоит из квадрата со стороной 1, четырех прямоугольников $1 \times \frac{1}{2}$ и четырех четвертей круга радиуса $\frac{1}{2}$. Следовательно, площадь одной окрестности равна $1+4\cdot\frac{1}{2}+\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=3+\frac{\pi}{4}$. Все 120 окрестностей покрывают площадь, не превосходящую (окрестности могут перекрываться) $120\cdot\left(3+\frac{\pi}{4}\right)=$ $=360+30\pi$.

В то же время площадь прямоугольника 19×24 равна 456. Остается заметить, что

$$360+30\pi<456,$$

так как $\pi<3,2$.

Задача 2. *Плоская фигура площади 1 покрыта конечным числом кругов. Доказать, что из этих кругов можно выбрать один или несколько попарно непересекающихся, занимающих площадь не меньше* $\frac{1}{9}$.

Выберем самый большой из данных кругов и обозначим через R_1

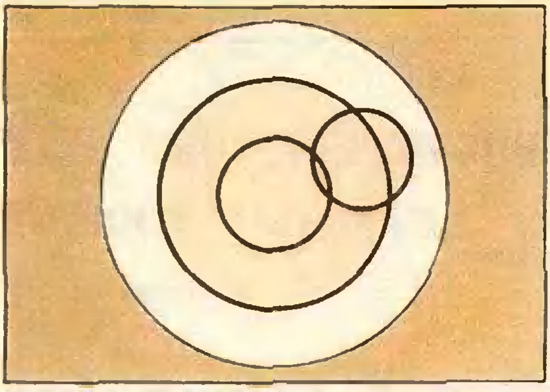


Рис. 2.

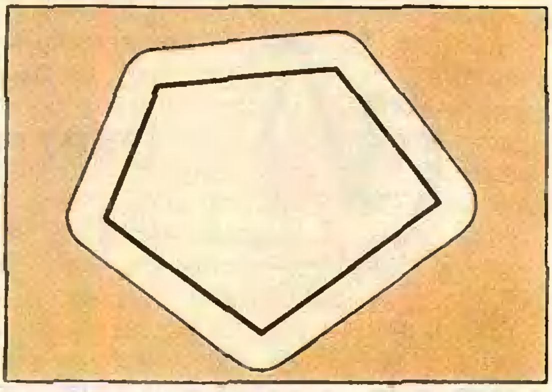


Рис. 3.

его радиус. Если площадь этого круга не меньше $\frac{1}{9}$, задача решена. Предположим, что $\pi R_1^2 < \frac{1}{9}$. Так как радиусы остальных кругов не больше R_1, то центры тех из них, которые пересекаются с выделенным кругом, лежат в R_1-окрестности этого круга. Сами же круги лежат в $2R_1$-окрестности выделенного круга (рис. 2). Так как площадь этой $2R_1$-окрестности, равная $9\pi R_1^2$, меньше 1, то найдутся круги, не пересекающиеся с выделенным. Пусть R_2 — радиус наибольшего из таких кругов. Если $\pi R_1^2 + \pi R_2^2 \geqslant \frac{1}{9}$, задача решена. Если же $\pi R_1^2 + \pi R_2^2 < \frac{1}{9}$, то $9\pi R_1^2 + 9\pi R_2^2 < 1$ и, следовательно, найдется круг, центр которого лежит вне R_1-окрестности первого и вне R_2-окрестности второго круга и который тем самым с этими кругами не пересекается. Обозначим через R_3 радиус наибольшего из кругов, не пересекающихся ни с одним из двух выделенных кругов. Если $\pi R_1^2 + \pi R_2^2 + \pi R_3^2 \geqslant \frac{1}{9}$ задача решена, в противоположном случае повторяем рассуждение. Таким образом, каждый раз мы либо находим несколько попарно непересекающихся кругов, сумма площадей которых не меньше $\frac{1}{9}$, либо обнаруживаем еще один круг, не пересекающийся ни с одним из найденных. Последнее в конце концов окажется невозможным так как кругов конечное число.

В обеих разобранных задачах полезным оказалось понятие окрестности фигуры.

Определение 1. *Пусть ε — положительное число. ε-окрестностью плоской фигуры F называется множество всех точек плоскости, расстояние* *) *которых до фигуры F не превосходит ε.*

Можно несколько иначе описать ε-окрестность плоской фигуры.

Определение 2. *Построим круги радиуса ε с центрами в каждой точке фигуры F. Совокупность точек всех этих кругов и есть ε-окрестность фигуры F.*

Понятие ε-окрестности можно ввести и для тел в пространстве. Нужно только вместо кругов рассмотреть шары радиуса ε с центрами в точках тела.

Выясним, что представляет собой ε-окрестность выпуклого многоугольника. Нетрудно понять, что она состоит из самого многоугольника, прямоугольников высоты ε, построенных на его сторонах как на основаниях и расположенных вне многоугольника, и круговых секторов радиуса ε с центрами в вершинах многоугольника (рис. 3). Центральный угол сек-

*) Говорят, что точка O находится на расстоянии от фигуры F, если всякий круг с центром O и радиусом, меньшим ε, не пересекается с фигурой F, а всякий круг с радиусом, большим ε, пересекается.

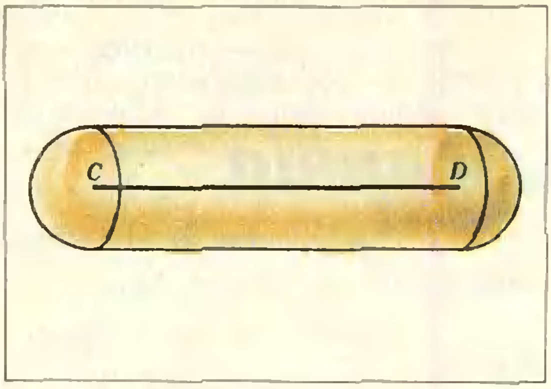


Рис. 4.

тора при каждой вершине многоугольника дополняет до 180° внутренний угол многоугольника при этой вершине. Следовательно, сумма всех центральных углов равна $180° n - 180° (n-2) = 360°$, ($n$ — число сторон многоугольника, $180° (n-2)$ — сумма его внутренних углов). Это означает, что, расположив секторы без наложений и совместив их центры, мы получим круг радиуса ε. Теперь легко вычислить площадь ε-окрестности выпуклого многоугольника. Она равна $S + P\varepsilon + \pi\varepsilon^2$, где S — площадь многоугольника, а P — его периметр.

Рассмотрим еще одну задачу, которая легко решается, если воспользоваться понятием окрестности фигуры.

Задача 3. *Точки A, B, C, D расположены в пространстве таким образом, что длины отрезков AC и BD не превосходят 1. Доказать, что для каждой точки M отрезка AB можно найти такую точку N отрезка CD, что длина отрезка MN не превосходит 1.*

Доказываемое утверждение можно сформулировать следующим образом: каждая точка отрезка AB отстоит не более чем на 1 от отрезка CD, то есть принадлежит 1-окрестности отрезка CD. Эта окрестность состоит из прямого кругового цилиндра радиуса 1, осью которого служит отрезок CD, и двух полушарий радиуса 1, осью которого служит отрезок CD, и двух полушарий радиуса 1 с центрами в точках C и D, основаниями которых являются основания цилиндра и которые расположены вне цилиндра (рис. 4). Из условия задачи следует, что точки A и B принадлежат 1-окрестности отрезка CD, а так как эта окрестность выпукла, то она содержит весь отрезок AB, что и требовалось доказать.

Упражнения

1. Стороны выпуклого многоугольника периметра P отодвигают параллельно самим себе во внешнюю сторону на расстояние 1 и продолжают до пересечения. Докажите, что площадь многоугольника увеличится при этом более чем на $P + \pi$.

2. Найдите объем ε-окрестности единичного куба.

3. В параллелепипеде $5 \times 10 \times 25$ произвольным образом расположено 120 единичных кубов. Докажите, что в параллелепипед можно поместить шар радиуса $1/2$, не имеющий общих точек ни с одним из кубов.

4. На плоскости расположено несколько правильных треугольников, покрывающих площадь 1. Докажите, что из них можно выбрать один или несколько попарно непересекающихся треугольников с суммарной площадью, не меньшей $1/16$.

5. В квадрат со стороной 38 *см* бросили 100 выпуклых многоугольников, площадь каждого из которых не превосходит π *см*^{2}; а периметр — 2π *см*. Докажите, что в квадрат можно поместить круг радиуса 1, не пересекающийся ни с одним из многоугольников.

6. Докажите, что в выпуклый многоугольник площади S и периметра P можно поместить круг радиуса $\dfrac{S}{P}$.

7. В квадрате со стороной 1 находится 6 отрезков длины $1/2$. Доказать, что на некоторых двух отрезках найдутся точки M и N, расстояние между которыми меньше $1/4$.

задачник Кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 декабря 1973 года по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М226, М227» или «...Ф238». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Оригинальные задачи, предлагаемые для публикации, присылайте вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). Решения задач из разных номеров журнала присылайте в разных конвертах.
В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Задачи повышенной трудности отмечены звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Задачи

М226—М230; Ф238—Ф242

М226. В трех вершинах квадрата находятся три кузнечика. Они играют в чехарду. При этом, если кузнечик A прыгает через кузнечика B, то после прыжка он оказывается от B на том же расстоянии (но, естественно, по другую сторону и на той же прямой; рис. 1). Может ли после нескольких прыжков один из кузнечиков попасть в четвертую вершину исходного квадрата?

Ю. И. Ионин

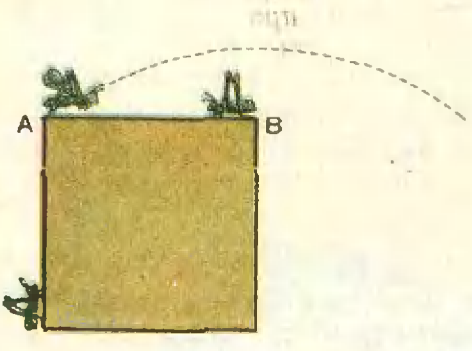


Рис. 1.

М227. На каждой стороне параллелограмма взято по точке. Площадь четырехугольника с вершинами в этих точках равна половине площади параллелограмма. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей четырехугольника параллельна одной из сторон параллелограмма.

Е. В. Саллинен

М228. Лист клетчатой бумаги размером $n \times n$ клеток раскрасили в n цветов (каждую клетку закрасили в один из этих цветов или не закрасили вообще). *Правильной* называется раскраска, при которой в каждой строке и в каждом столбце нет двух клеток одного цвета. Всегда ли можно «докрасить» весь лист правильным образом, если первоначально были правильно закрашены

а) $n^2 - 1$ клетка;

б) $n^2 - 2$ клетки;

в) n клеток?

Д. Логачев

М229. В центре квадрата находится полицейский, а в одной из вершин — гангстер. Полицейский может бегать по всему квадрату, а гангстер — только по его сторонам. Известно, что максимальная скорость полицейского равна u, а гангстера — v. Цель полицейского — оказаться с гангстером на одной стороне квадрата. Докажите, что

а) если $\frac{u}{v} > \frac{1}{3}$, то он может добиться своей цели;

б) если $\frac{u}{v} < \frac{1}{3}$, то гангстер может помешать ему это сделать.

А. Белкин

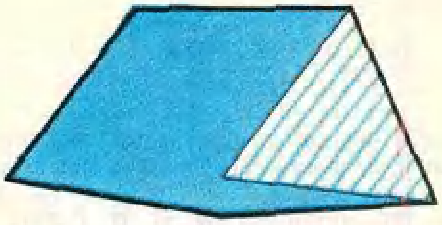


Рис. 2.

М230. Докажите, что из любого выпуклого равностороннего (но не обязательно правильного) пятиугольника можно вырезать правильный треугольник, одна из сторон которого совпадает со стороной пятиугольника (рис. 2).

С. Конягин.

Ф238. Имеются две проволоки квадратного сечения, сделанные из одного и того же материала. Сторона сечения одной проволоки — 1 *мм*, а другой — 4 *мм*. Для того чтобы расплавить первую проволоку, через нее нужно пропустить ток в 10 *а*. Какой ток нужно пропустить через вторую проволоку, чтобы она расплавилась?

Считать, что количество тепла, уходящего в окружающую среду за 1 секунду, пропорционально разности температур проволоки и среды и площади поверхности проволоки, причем коэффициент пропорциональности одинаков для обеих проволок.

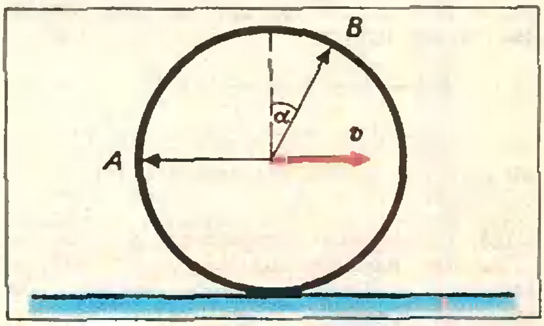


Рис. 3.

Ф239. Колесо радиуса R катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Скорость центра колеса постоянна.

Как известно, траекторию криволинейного движения точки в течение малого промежутка времени всегда можно считать дугой окружности. Определить радиусы окружностей, по которым движутся точки колеса A и B, в тот момент времени, когда радиус-вектор точки A горизонтален, а радиус-вектор точки B составляет угол α с вертикалью (рис. 3).

Ф240. Шар-зонд, имеющий нерастяжимую оболочку, поднялся на максимальную высоту и совершает малые колебания около равновесного уровня. Найти период этих колебаний, считая, что на такой высоте плотность воздуха ρ убывает с высотой равномерно на величину $\delta = 1{,}2 \cdot 10^{-2}\ \rho$ через каждые $h = 100$ *м*. Трением шара о воздух пренебречь.

М. В. Казарновский

Ф241. Кольцо массы m может скользить по стержню длины L. Сила трения между ними F. Определить, какую минимальную скорость v_0 нужно сообщить стержню, чтобы он пролетел сквозь кольцо, если вначале кольцо покоится.

Опыт проводится в невесомости.

Ф242. Камера-обскура представляет собой прямоугольный ящик, в одной из стенок которого имеется круглое отверстие. Освещенность изображения Солнца, которое получается на противоположной стенке камеры — экране, падает вдвое при удалении от центра изображения к краю на 0,9 радиуса изображения. Во сколько раз освещенность передней стенки камеры больше, чем освещенность в центре изображения?

Г. Л. Коткин

Решения задач

М184—М189; Ф198—Ф202

М184. *Докажите тождество*

$$\frac{C_n^0}{x}-\frac{C_n^1}{x+1}+\ldots+(-1)^n\frac{C_n^n}{x+n}=\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}.$$

Докажем это тождество методом математической индукции. При $n=1$ оно верно, поскольку $C_1^0=C_1^1=1!=1$:

$$\frac{C_1^0}{x}-\frac{C_1^1}{x+1}=\frac{1!}{x(x+1)}.$$

Допустим, что верно тождество

$$\frac{C_n^0}{x}-\frac{C_n^1}{x+1}+\frac{C_n^2}{x+2}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{C_n^{n-1}}{x+n-1}+(-1)^n\times\frac{C_n^n}{x+n}=\frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}.\qquad(1)$$

Заменим в (1) x на $x+1$. Получим тождество

$$\frac{C_n^0}{x+1}-\frac{C_n^1}{x+2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{C_n^{n-1}}{x+n}+(-1)^n\frac{C_n^n}{x+n+1}=\frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)}.\qquad(2)$$

Вычтем почленно (2) из (1) и воспользуемся тем, что

$$C_n^0=C_n^n=C_{n+1}^0=C_{n+1}^{n+1}=1,$$
$$C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$$

для каждого $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$. Получим

$$\frac{C_{n+1}^0}{x}-\frac{C_{n+1}^1}{x+1}+\frac{C_{n+1}^2}{x+2}-\ldots+(-1)^n\frac{C_{n+1}^n}{x+n}+(-1)^{n+1}\times\frac{C_{n+1}^{n+1}}{x+n+1}=\frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}\times\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+n+1}\right)=$$
$$=\frac{(n+1)!}{x(x+1)\ldots(x+n+1)}.\qquad(3)$$

Таким образом, индуктивный шаг проделан и наше равенство доказано при всех n.

Те, кто читал статью В. Н. Вагутена «Числа C_n^k, последовательности и многочлены» в «Кванте» № 2 (1973), заметили, конечно, что в задаче М184 мы получили формулу разности порядка n для последовательности $f(x)=\frac{1}{x}$:

$$\Delta^n f(x)=\frac{(-1)^n\,n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

Многие читатели привели доказательство следующего утверждения о единственности тождества вида (1): *если верно тождество*

$$\frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}=\sum_{l=0}^{n}\frac{A_k}{x+k},\qquad(4)$$

где A_k — некоторые числа, то

$$A_k=(-1)^kC_n^k=\frac{(-1)^k\,n!}{k!\,(n-k)!}.\qquad(5)$$

Действительно, достаточно умножить обе части (4) на общий знаменатель $x(x+1)\ldots(x+n)$ и положить в полученном тождестве $x=-k$. Тогда справа все слагаемые, кроме одного

$$A_k(-k)(-k+1)\ldots(-1)\,1\cdot2\cdot\ldots\cdot(n-k)=A_k(-1)^k\,k!\,(n-k)!$$

обратятся в нуль и мы придем к (5).

М185. *На кафтане площадью 1 помещается 5 заплат, площадь каждой из которых не меньше $^1/_2$. Докажите, что найдутся две заплаты, площадь общей части которых не меньше $^1/_5$.*

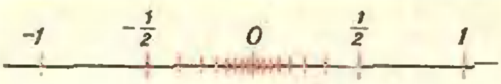


Рис. 1.

Обозначим через x_k площадь части кафтана, покрытую ровно k заплатами ($k = 0, 1, \ldots, 5$). По условию площадь кафтана равна 1, а сумма площадей заплат — $\frac{5}{2}$:

$$S_0 = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1,$$

$$S_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = \frac{5}{2}.$$

Сумма площадей всех 10 попарных пересечений заплат равна

$$S_2 = x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 10x_5 \geqslant -3x_0 - x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 2S_1 - 3S_0 = 2,$$

поэтому хотя бы одно из 10 попарных пересечений будет по площади не меньше $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ (равенство возможно, только если $x_0 = x_1 = x_4 = x_5 = 0$ и все 10 попарных пересечений равны по площади!).

Решение задачи М185, различных ее вариантов и обобщений тесно связано с одной замечательной общей формулой для аддитивных функций множества — «формулой включений и исключений». Об этой связи подробно рассказывается в отдельной заметке «Заплаты на кафтане», которая будет помещена в 12 номере журнала.

М186. *Найдите все решения уравнения*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

в целых числах, отличных от 1.

Если k — целое число, отличное от 1, то

$$\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{2}$$

(на рисунке 1 красными штрихами на числовой оси показаны числа вида $\frac{1}{k}$, $k \neq 1$).

Отсюда сразу следует, что ни одно из чисел x, y, z не может быть отрицательным: если, скажем, $x < 0$, то

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Итак, достаточно найти решение в целых п о л о ж и т е л ь н ы х числах x, y, z.

Мы можем считать, что $1 < x \leqslant y \leqslant z$: остальные решения получатся перестановкой. Другими словами, достаточно найти такие решения, для которых

$$1 > \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y} \geqslant \frac{1}{z}.$$

Ясно, что x не может быть больше 3: если $x > 3$, то

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Поэтому возможны только два случая:

1) $x = 3$ (и тогда, очевидно, $y = z = 3$);
2) $x = 2$. В этом случае должно быть

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}.$$

При этом y не может быть больше 4: иначе

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Поэтому либо $y = 4$ (и тогда $z = 4$), либо $y = 3$ (и тогда $z = 6$).

Итак, уравнение имеет всего десять решений в целых числах, отличных от 1: шесть, получающихся перестановкой из чисел (2, 3, 6), три, получающиеся перестановкой из чисел (2, 4, 4), и еще одно: $x = 3$, $y = 3$, $z = 3$.

М187. *На плоскости заданы две точки A и B. Найдите геометрическое место третьих вершин C треугольника ABC, у которого:*

а) высота AA' равна стороне BC;
б) медиана AA_1 равна стороне AC;
в) медиана AA_1 равна стороне BC;
г) высота CC' равна медиане BB_1;
д) высота BB' равна медиане CC_1.

а) Искомое множество точек C будет, очевидно, симметричным относительно прямой AB; поэтому достаточно исследовать только точки, лежащие в одной из полуплоскостей, на которые прямая AB делит плоскость.

Построим точку D такую, что $DB \perp AB$ и $DB = BA$. В той полуплоскости, которую мы рассматриваем, такая точка D, очевидно, единственна. Если высота AA' равна CB, то (рис. 2)

$$\Delta AA'B = \Delta CBD$$

(углы $A'AB$ и CBD равны, поскольку оба они острые, $AA' \perp BC$ и $AB \perp BD$). Таким образом,

$$\angle BCD = 90°. \qquad (1)$$

Обратно, если для некоторой точки C угол

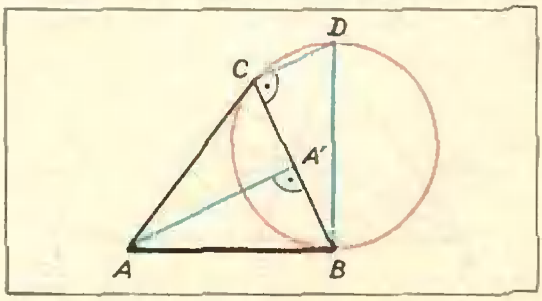


Рис. 2.

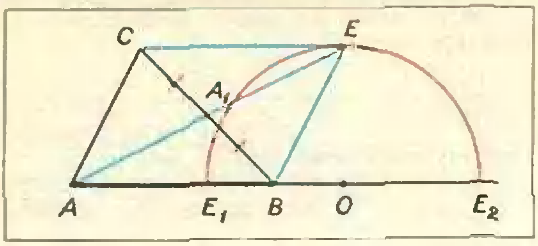


Рис. 3.

BCD прямой, то, очевидно, $\Delta AA'B = \Delta CBD$ и $AA' = BC$. Таким образом, достаточно найти множество точек C, для которых выполнено условие (1) (B и D — фиксированные точки). Это множество, как известно, — окружность с диаметром BD.

б) Пусть E — такая точка на продолжении медианы AA_1, что $A_1E = AA_1$. Тогда $ACEB$ — параллелограмм (рис. 3). Условие $AA_1 = AC$ равносильно тому, что

$$AE = 2BE. \qquad (2)$$

Воспользуемся такой теоремой:

Если A и B — две данные точки плоскости, то множество точек E плоскости, для которых $\dfrac{AE}{BE} = k$ (k — фиксированное положительное число, отличное от 1), — *окружность, построенная на диаметре E_1E_2, где E_1 и E_2 — точки на прямой AB, для которых*

$$\frac{AE_1}{BE_1} = k \quad \text{и} \quad \frac{AE_2}{BE_2} = k$$

(E_1 лежит внутри отрезка AB, E_2 — вне этого отрезка). Ниже мы коротко напомним, как можно доказать эту теорему *).

Из этой теоремы следует, что множество точек E — окружность с диаметром E_1E_2, E_1 и E_2 — точки на прямой AB такие, что

$$\frac{AE_1}{BE_1} = \frac{AE_2}{BE_2} = 2,$$

а чтобы получить искомое множество точек C, нужно сдвинуть эту окружность на вектор $\overrightarrow{BA}$ (ведь $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BA}$!).

Осталось только доказать теорему. Чисто геометрически это можно сделать по такому плану: если $\dfrac{AE}{BE} = k = \dfrac{AE_1}{BE_1} = \dfrac{AE_2}{BE_2}$, то EE_1 и EE_2 — биссектрисы углов между прямыми AE и BE; поэтому $\angle E_1EE_2 = 90°$, так что E лежит на окружности с диаметром E_1E_2. Обратно, если O — центр этой окружности, то для любой точки E окружности $EO^2 = AO \cdot BO$, то есть треугольники AOE и EOB подобны и

$$\frac{EA}{EB} = \frac{AO}{OE} = \frac{OE}{OB} = k.$$

в) Условие $AA_1 = BC$ эквивалентно тому, что

$$AA_1 = 2BA_1. \qquad (3)$$

Таким образом, геометрическим местом точек A_1 служит та самая окружность, которая использовалась в решении предыдущей задачи (рис. 4), только теперь ее нужно не сдвигать, а подвергнуть растяжению с коэффициентом 2 и центром в точке B: ведь $BC = 2BA_1$!

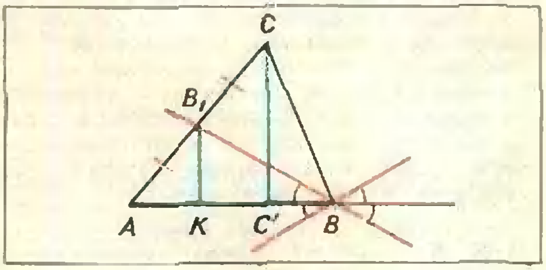


Рис. 5.

г) Опустим из точки B_1 — середины стороны AC — перпендикуляр B_1K на прямую AB. Разумеется, $CC' = 2B_1K$, поэтому условие $CC' = BB_1$ равносильно такому условию (рис. 5): $BB_1 = 2B_1K$ (катет равен половине гипотенузы). Следовательно, $\angle B_1BK = 30°$. Поэтому геометрическое место точек B_1 — четыре луча, выходящие из точки B и образующие с отрезком AB углы в 30° и 150°. Множество точек C получается из него растяжением с коэффициентом 2 и центром в точке A.

д) Пусть L — проекция точки C_1 (середины отрезка AB) на прямую AC. Поскольку (рис. 6) $BB' = CC_1$, то $2C_1L = CC_1$ и $\angle LCC_1 = 30°$. Следовательно, $\angle ACC_1$ равен 30° или 150°, и геометрическим местом точек C будет пара окружностей, проходящих через точки A и C_1.

На рисунке 7 изображены ответы к задачам М187 а)—д). Точки C, лежащие на самой прямой AB, мы не включаем в искомое множество точек (они приводят к «вырожденным» треугольникам ABC); выше

*) См. также книги: Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л. Прямые и кривые. М., «Наука», 1970, с. 22, 102 и Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Кириллов А. А. Метод координат. М., «Наука», 1968, с. 32.

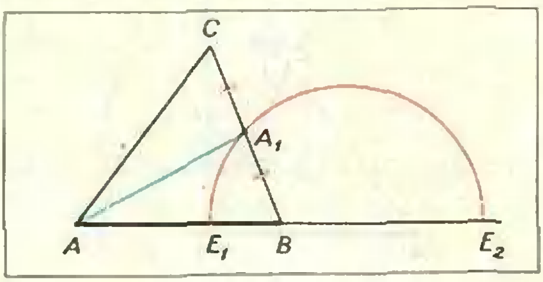


Рис. 4.

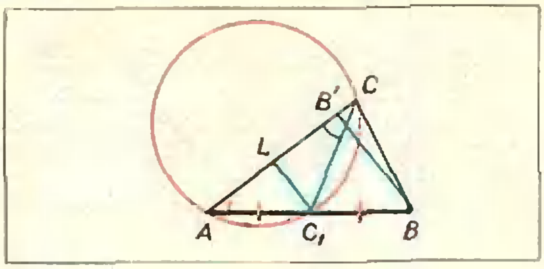


Рис. 6.

мы не оговаривали это в каждом отдельном случае для экономии места.

Мы получили много решений задач **М187** а)—д), но в большинстве из них содержатся недочеты (например, потеряна «половина» ответа, нет полного доказательства «в обе стороны» и т. п.).

Н. Б. Васильев

М188. *Между некоторыми из $2n$ городов установлено воздушное сообщение, причем каждый город связан не менее чем с n другими (беспосадочными рейсами). Докажите, что даже если отменить любые $n-1$ рейсов, то все равно из любого города можно добраться в любой другой город на самолетах (с пересадками). Укажите все случаи, когда такая «связность» нарушается при отмене n рейсов.*

Предположим, что после отмены некоторых l рейсов «связность» нарушилась. Тогда наверняка есть такие k городов, где $k \leqslant n$, что из них нельзя проехать в остальные $2n-k$ городов. Действительно, рассмотрим некоторый город A и все города, в которых можно из него проехать (возможно, с пересадками). Если их (вместе с A) не больше n, то нужные k городов найдены. Если же их m и $m > n$, то из них нельзя попасть в остальные $2n-m$ городов, а из этих $2n-m < n$ городов нельзя проехать в остальные m городов. Итак, в любом случае найдутся k городов, где $k \leqslant n$, из которых нельзя проехать в остальные $2n-k$ городов. Первоначально каждый из этих городов был связан авиалиниями не менее чем с n городами, поэтому по крайней мере $n+1-k$ рейсов соединяли его не с выделенными k городами и, следовательно были отменены. Значит, всего было отменено не меньше чем $k(n+1-k)$ рейсов. Но $k(n+1-k) > n-1$ при $k = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, если отменить $n-1$ рейс, то «связность» не нарушается.

Ответим теперь на второй вопрос задачи. Заметим, что $k(n+1-k) = n$ лишь при $k = 1$ и $k = n$. Если $k = 1$, то это значит, что некоторый город был связан рейсами ровно с n городами и все эти рейсы были отменены. Если $k = n$, то это значит, что некоторые n городов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно соединены авиалиниями, оставшиеся n городов $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ тоже попарно соединены авиалиниями и есть еще n рейсов, соединяющих города A_1 и A'_1, A_2 и $A'_2, \ldots$ $\ldots, A_n$ и A'_n. На рисунке 8 вы видите схемы авиалиний для $n = 2$ и $n = 3$.

Л. Г. Лиманов

М189. *Три отрезка AB, EF и CD проходят через одну точку O, причем точка E лежит на отрезке AC, а точка F — на отрезке BD. Докажите, что EF меньше хотя бы одного из двух отрезков — AB или CD (рис. 9).*

Мы воспользуемся тем, что длина биссектрисы в треугольнике не превосходит полусуммы длин заключающих ее сторон (докажите это!). Предположим, что отрезок EF длиннее на Δ большего из отрезков AB, CD ($\max(AB, CD)$). Пусть $\angle AOE \neq \angle EOC$ — в противном случае $EF \leqslant \dfrac{AB+CD}{2}$ и EF не может быть длиннее $\max(AB, CD)$. Пусть для определенности $\angle AOE > \angle EOC$. Построим тогда такой отрезок E_1F_1 (см. рис. 10), что $\angle E_1OE = \angle EOC$. Ясно, что точка E_1 принадлежит отрезку AC, а точка F_1 — отрезку BD. $EF \leqslant \dfrac{CD+E_1F_1}{2}$, поэтому E_1F_1 по крайней мере на 2Δ длиннее $\max(AB, DC)$. Таким образом, мы сумели перейти от отрезка, «большего на Δ», к отрезку, «большему на 2Δ», где Δ — некоторое положительное число. Повторив такой переход k раз, мы получим отрезок E_kF_k, который длиннее $\max(AB, CD)$ по крайней мере на $2^k \cdot \Delta$. Выбрав k достаточно большим, мы можем сделать длину отрезка E_kF_k большей $AB+CD$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что отрезок EF не может быть больше $\max(AB, CD)$. Задача решена.

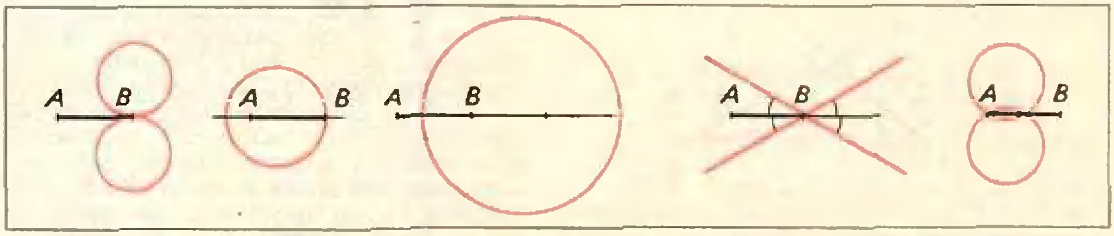


Рис. 7.

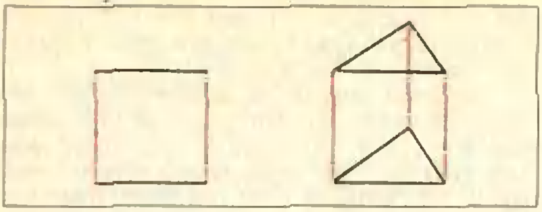


Рис. 8.

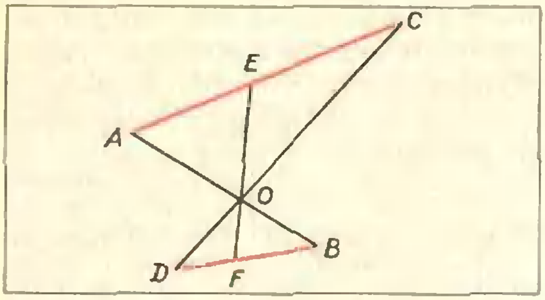


Рис. 9.

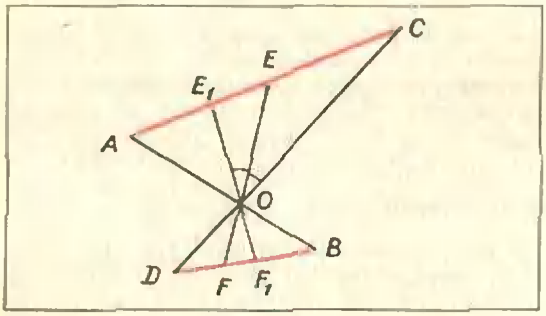


Рис. 10.

Вот второе решение задачи **М189**. Проведем через точки E и F прямые, перпендикулярные EF. Продолжим отрезки OA, OB, OC, OD до пересечения с этими прямыми и введем обозначения, как показано на рисунке 11. Пусть точка A лежит внутри полосы между прямыми, C — вне ее; тогда D должна лежать внутри полосы (иначе, очевидно, $CD > EF$), а B — вне. Из неравенств

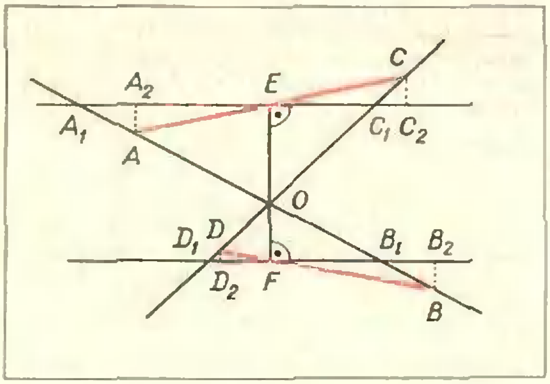


Рис. 11.

$$\frac{AA_2}{CC_2}=\frac{A_2E}{EC_2}\leqslant\frac{A_1E}{EC_1}=\frac{B_1F}{FD_1}\leqslant\frac{B_2F}{FD_2}=\frac{BB_2}{DD_2}$$

следует, что либо $AA_2 \leqslant BB_2$ (и тогда $AB > EF$), либо $CC_2 \geqslant DD_2$ (и тогда $CD > EF$).

Д. Ю. Григорьев

Ф198. *Конькобежец решил затормозить и свел вместе пятки. Хотя это и трудно (почему?), но конькобежцу удается удерживать пятки вместе. Как он будет двигаться дальше?*

Обычно при малых скоростях движения конькобежец тормозит, сводя вместе не пятки, а носки ног. Такое движение конькобежца устойчиво. Однако конькобежец рискует упасть. Поэтому при больших скоростях движения конькобежец (как и хоккеист) тормозит, поворачивая оба конька в одну сторону. При этом он, конечно, тормозит и одновременно едет в сторону. Впрочем, даже сводя носки ног вместе, конькобежец обычно едет попеременно то на одном, то на другом коньке.

Когда лезвие конька расположено по направлению движения конькобежца, конек легко скользит по льду, то есть сила трения очень мала. Если конькобежец хочет затормозить, он ставит конек под некоторым углом к направлению движения, при этом возникает еще одна сила трения, перпендикулярная лезвию. Величина этой силы намного больше первой, так как в этом случае лезвие конька как бы срезает лед. Для простоты в дальнейшем будем говорить только об этой, перпендикулярной лезвию, силе трения.

Пусть конькобежцу удалось свести пятки вместе. Из рисунка 12, *а* видно, что в этом случае кроме сил сопротивления $F_{с.\,1}$ и $F_{с.\,2}$, направленных против скорости v, существуют силы F_1' и F_2', стремящиеся развести коньки в стороны. Вот почему конькобежцу приходится прикладывать усилия, чтобы удержать пятки вместе.

Как будет двигаться конькобежец после того, как он свел пятки ног? Ответить на этот вопрос нетрудно, так как из опыта известно, что в этом случае конькобежец развернется и затем будет ехать задом наперед. Труднее объяснить, почему это происходит. Здесь важны, по-видимому, несколько факторов.

Один из них — зависимость сил трения, перпендикулярных плоскости конька, от угла, который образует плоскость конька с направлением движения конькобежца. Если угол равен нулю, то эта сила тоже равна нулю, при угле, равном 90°,— сила максимальна. (Зависимость силы трения от угла связана

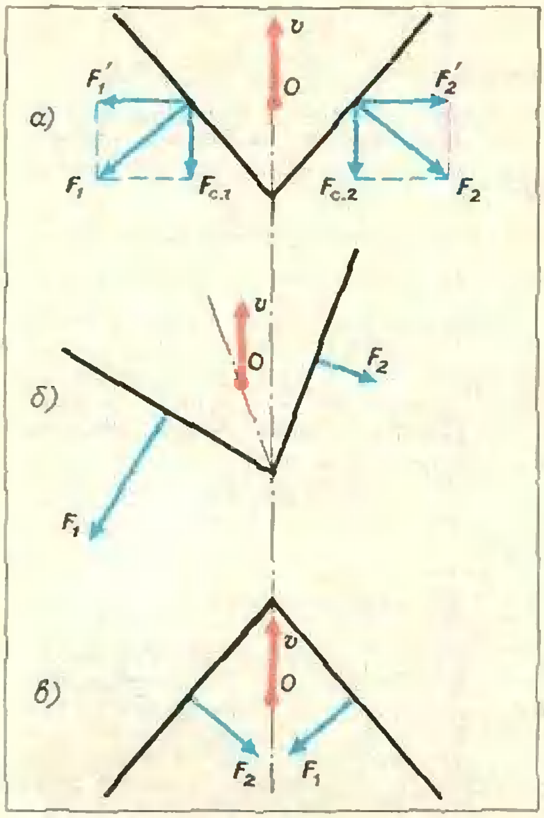


Рис. 12.

с изменением количества льда, «срезаемого» коньком в единицу времени.) Пусть в силу каких-то случайных причин, например, из-за неровностей льда, конькобежец повернулся на некоторый угол (рис. 12, *б*). В этом случае сила F_2 *уменьшится, а сила* F_1 *увеличится*. Следовательно, изменятся и моменты сил относительно оси, проходящей через центр тяжести конькобежца. Это приведет к тому, что конькобежец развернется и будет ехать задом наперед (рис. 12, *в*). Такое положение конькобежца устойчиво (покажите это!).

Другой возможный фактор — это то, что при резких поворотах ног положение центра тяжести не успевает измениться. Нетрудно сообразить, что это тоже приводит к увеличению момента силы F_1 и уменьшению момента силы F_2.

Возможно, играют роль и другие факторы, так что *для того чтобы дать полный* ответ, нужны эксперименты, которые позволили бы оценить влияние каждого из факторов. Возможно, эти эксперименты поставит кто-нибудь из наших читателей. Тогда мы продолжим обсуждение этой задачи.

Ф199. *Нейтрон легко проходит через слой свинца, но задерживается в таком же слое парафина, воды или другого соединения, содержащего водород. Объясните, почему.*

При прохождении нейтрона через вещество он сталкивается с атомами вещества и передает им часть своей кинетической энергии. Благодаря этому он тормозится. Покажем, что при столкновении с атомом водорода нейтрон передает ему бóльшую часть своей энергии, чем при столкновении с атомом свинца. Будем считать нейтрон и атом вещества шарами, между которыми происходит центральный абсолютно упругий удар. Обозначим массу атома M, массу нейтрона m, скорость нейтрона до столкновения с атомом v_0, после столкновения с атомом v и скорость атома после столкновения u. Положим, что атом до столкновения покоился (в действительности он колеблется около положения равновесия, однако в силу хаотичности этого движения им можно пренебречь). Посмотрим, как зависит энергия, передаваемая этому атому при столкновении, от отношения масс атома и нейтрона, то есть от отношения масс сталкивающихся шаров.

Запишем законы сохранения энергии и импульса:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{Mu^2}{2} + \frac{mv^2}{2},$$

$$mv_0 = Mu + mv.$$

Перепишем эту систему так:

$$v_0^2 - v^2 = ku^2,$$

$$v_0 - v = ku$$

(здесь $k = \dfrac{M}{m}$ — отношение массы атома к массе нейтрона), откуда

$$u = v\frac{2}{k+1}.$$

Теперь можно найти энергию атома после столкновения (ее потерял при столкновении нейтрон):

$$W_a = \frac{Mu^2}{2} = 4\frac{Mv^2}{2}\frac{1}{(k+1)^2} = 4\frac{M}{m}\frac{mv^2}{2}\frac{1}{(k+1)^2}.$$

Так как $\dfrac{mv^2}{2} = W_0$ — это начальная энергия нейтрона, то

$$W_a = 4\frac{k}{(k+1)^2}W_0 = \frac{4}{k+\dfrac{1}{k}+2}W_0.$$

Исследуем полученное выражение. Очевидно, что при $k = 0$ и $k \to \infty$ $W_a \to 0$.

Так как функция $\dfrac{k}{(k+1)^2}$ непрерывна, то *при некотором значении* k *она будет* максимальна (рис. 13). Ясно, что максимум функции соответствует минимуму выражения в знаменателе, которое можно за-

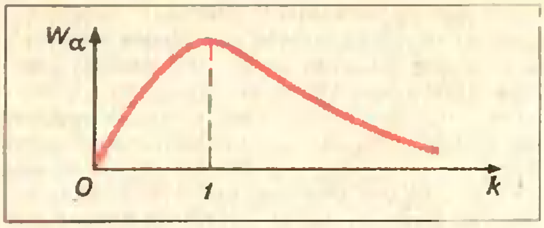


Рис. 13.

писать так:

$$2+\left(k+\frac{1}{k}\right).$$

Согласно теореме о среднем *) сумма $k+\frac{1}{k}$ минимальна при равенстве слагаемых, то есть когда $k=\frac{1}{k}$ или $k=1$. При этом $W_a=W_0$.

Итак, нейтрон передает атому максимальную часть своей начальной кинетической энергии при равенстве масс нейтрона и атома, как в случае атома водорода.

При $k=207$, как в случае свинца, нейтрон при столкновении с атомом передает ему примерно $\frac{4}{209}$ своей кинетической энергии.

Все рассуждения в принципе остаются справедливыми и для нецентральных ударов. Так как столкновения нейтрона с атомами вещества происходят многократно, начальная кинетическая энергия нейтрона довольно быстро переходит в тепло.

Этим и объясняется то, что нейтроны хорошо задерживаются водой, парафином или другими соединениями, содержащими атомы водорода, и легко проходят через такие же блоки свинца.

Ф200. *В результате импульсного разряда конденсатора через разреженный гелий происходит нагревание газа до температуры T. Оценить величину T, если напряжение на конденсаторе $U=30$ кв, емкость конденсатора $C=18$ мкф и газ занимает объем 10 л при давлении 10^{-2} мм рт. ст.*

Для оценки будем считать, что при разрядке конденсатора вся его энергия расходуется только на нагревание гелия, то есть на увеличение его внутренней энергии. Поэтому можно записать, что

$$\frac{CU^2}{2}=\Delta W_{\text{вн}}.$$

Гелий—одноатомный газ. Поэтому его внутренняя энергия $W_{\text{вн}}$ равна $\frac{3}{2}RTn$, а ее изменение $\Delta W_{\text{вн}}=\frac{3}{2}Rn\,(T-T_0)$, где R—универсальная газовая постоянная, n—число молей газа, T_0—начальная температура. Согласно уравнению газового состояния

$$P_0V_0=nRT_0$$

и

$$n=\frac{P_0V_0}{T_0R},$$

где P_0, V_0, T_0—начальные параметры гелия (T_0 можно считать равной комнатной, то есть 300° К). Таким образом, получаем

$$\frac{CU^2}{2}=\frac{3}{2}R\frac{P_0V_0}{RT_0}(T-T_0),$$

откуда

$$\frac{T}{T_0}=\frac{CU^2}{3P_0V_0}+1\approx 1{,}2\cdot 10^6$$

и $T\approx 3{,}6\cdot 10^8$ градусов по Кельвину.

При решении задачи мы предполагали, что можно пренебречь теплообменом с окружающей средой, нагреванием пластин конденсатора, излучением энергии электромагнитных волн. Полученный результат резко отличается от экспериментальных данных, поэтому следует заметить, что наши допущения противоречат действительности. Например, учет теплообмена с окружающей средой уменьшает температуру сразу на несколько порядков (примерно до тысяч градусов).

Ф201. *Если к некоторому сопротивлению подключить аккумулятор, то зависимость тока в цепи от времени будет такой, как показано на рисунке 14 красной линией. Если к этому же сопротивлению подключить другой такой же аккумулятор, но частично разряженный, то зависимость тока от времени будет такой, как показано на рисунке 14 синей линией. Если оба аккумулятора подключить к тому же сопротивлению вместе, соединив их параллельно, то вначале по цепи будет идти ток 1,5 а. Нарисуйте график дальнейшего изменения тока в цепи со временем.*

Внутреннее сопротивление аккумулятора в процессе разрядки не меняется.

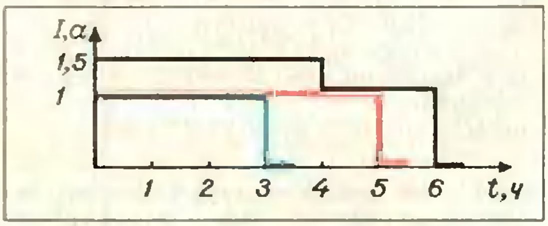


Рис. 14.

*) См. статью: Боровинский Л. А. Задачи на максимум и минимум. «Квант», 1973, № 5.

Так как аккумуляторы имеют одинаковые э. д. с. и внутренние сопротивления, то при их параллельном соединении через них будут идти одинаковые токи, равные половине тока через сопротивление, то есть 0,75 *а*. Оба аккумулятора при этом будут разряжаться.

По условию задачи емкость*) первого аккумулятора равна 1 *а*·3 *ч* = 3 *а*·*ч*. Поэтому второй аккумулятор будет разряжаться в течение четырех часов $\left(\frac{3\ а\cdot ч}{0{,}75\ а} = 4\ ч\right)$; емкость первого к концу этого процесса уменьшится до 2 *а*·*ч*. После этого второй аккумулятор будет вести себя аналогично конденсатору, на котором есть некоторое напряжение, но ток через него не идет. Действительно, как только э. д. с. этого аккумулятора начнет уменьшаться, первый аккумулятор будет его подзаряжать до э. д. с., равной напряжению на зажимах первого аккумулятора.

Начиная с этого момента первый аккумулятор будет работать только на внешнее сопротивление. Так как его оставшаяся емкость равна 2 *а*·*ч*, а по сопротивлению идет ток 1 *а*, то его энергии хватит на два часа работы.

Следовательно, в течение четырех часов по сопротивлению идет ток 1,5 *а*, затем в течение двух часов — 1 *а*. График изменения тока со временем показан на рисунке 14 черной линией.

Ф202. *Труба радиуса r заполнена пористым веществом плотности ρ_0. Невесомый поршень, на который действует постоянная сила F, вдвигаясь в трубу, уплотняет вещество до плотности ρ (рис. 15). С какой скоростью движется поршень, если уплотнение происходит скачком, то есть в трубе как бы перемещается с некоторой скоростью поверхность, справа от которой плотность вещества ρ_0, а слева ρ? В начальный момент эта поверхность совпадает с плоскостью поршня.*

Будем считать, что труба достаточно велика, так что граница областей с различной плотностью находится далеко от конца цилиндра. Тогда ясно, что единственной горизонтальной силой, действующей на вещество в цилиндре, является сила F; поэтому изменение импульса вещества в цилиндре равно импульсу этой силы.

Каждая из приведенных в движение частиц вещества движется со скоростью движения границы между областями с различной плотностью. Обозначим эту скорость c, а скорость движения поршня v.

---

*) Емкость аккумулятора — это максимальный заряд, который можно получить от него при разрядке.

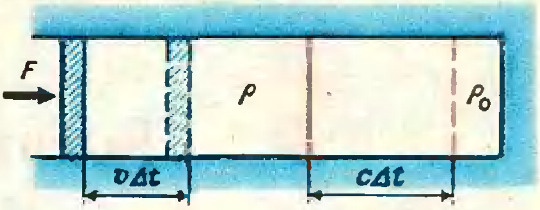


Рис. 15.

За время Δt поршень переместится на расстояние $v\,\Delta t$, и в движение придут те частицы, которые находятся в объеме $v\Delta t\pi r^2$, причем плотность этих частиц равна ρ_0 (остальные частицы, плотность которых равна $\rho-\rho_0$, уже движутся со скоростью c). Так как скорость каждой из частиц равна c, то импульс, который приобретают частицы вещества за время Δt, равен $v\Delta t\rho_0 c\pi r^2$. Этот импульс, как мы уже говорили, равен импульсу силы F. Следовательно,

$$F\Delta t = \pi v\rho_0 c r^2\Delta t. \tag{1}$$

Ясно, что скорости c и v не независимы. Из условия сохранения массы следует, что масса вещества, которое находится в объеме $v\Delta t\pi r^2$, при смещении поршня на расстояние $v\Delta t$ должна распределиться по объему $c\Delta t\pi r^2$, причем здесь она будет иметь плотность $\rho-\rho_0$. Поэтому

$$v\rho\Delta t\pi r^2 = c(\rho-\rho_0)\Delta t\pi r^2.$$

Отсюда

$$c = v\frac{\rho}{\rho-\rho_0}. \tag{2}$$

Подставляя (2) в формулу (1), получим

$$F = \pi v^2\frac{\rho\rho_0}{\rho-\rho_0}r^2,$$

и

$$v = \sqrt{\frac{F}{\pi r^2}\,\frac{\rho-\rho_0}{\rho\rho_0}}.$$

И. Ш. Слободецкий

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Высота пирамиды

М. Л. Крайзман

Что можно сказать о высоте произвольной пирамиды? Довольно мало. Разве только повторить, по существу, *определение*: высота пирамиды проходит через вершину пирамиды и перпендикулярна ее основанию.

Однако, если про пирамиду известны некоторые дополнительные сведения, то положение высоты можно охарактеризовать подробнее. Так, всем хорошо известен тот факт, что в *правильной* пирамиде высота проходит через центр лежащего в основании правильного многоугольника. Опыт приемных экзаменов показывает, что абитуриенты обычно твердо знают положение высоты пирамиды, у которой все боковые ребра равны, но испытывают большие затруднения, если нужно определить положение высоты пирамиды, у которой, например, равны между собой т о л ь к о д в а смежных боковых ребра.

В настоящей статье мы проследим, какие особенности пирамиды позволяют получить дополнительную информацию о том, как проходит высота пирамиды. В приводимых ниже утверждениях устанавливается связь между свойствами пирамиды и положением ее высоты. Эти утверждения не следует, конечно, заучивать. Но их полезно осознать и научиться «видеть», решая ту или иную задачу о пирамидах.

У т в е р ж д е н и е 1. *Если боковая грань пирамиды перпендикулярна плоскости основания, то высота пирамиды проходит в плоскости этой грани, а основание высоты лежит на той стороне основания (или на ее продолжении), по которой эта грань пересекается с плоскостью основания.*

В самом деле, если боковая грань ASB перпендикулярна плоскости основания пирамиды (рис. 1), то, согласно теореме о перпендикуляре, опущенном на одну из двух взаимно перпендикулярных плоскостей и имеющем общую точку с другой из этих плоскостей, высота SO пирамиды принадлежит плоскости боковой грани ASB. При этом основание O высоты пирамиды находится на стороне AB основания (или на ее продолжении). Другими словами, высотой пирамиды является высота треугольника ASB.

У т в е р ж д е н и е 2. *Если два смежных боковых ребра пирамиды равны, то основание высоты пирамиды находится на перпендикуляре, проведенном через середину той стороны основания, из концов которой исходят эти боковые ребра.*

Действительно, пусть SO — высота пирамиды (рис. 2); тогда OA и OB — проекции ребер SA и SB на плоскость основания. Если $SA = SB$, то (по известному свойству проекций равных наклонных)

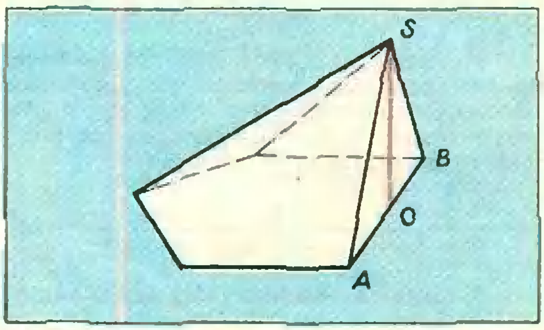


Рис. 1.

$OA = OB$, то есть точка O (лежащая в плоскости основания) равноудалена от концов стороны AB основания. Следовательно, основание O высоты SO пирамиды лежит на перпендикуляре, проведенном (в плоскости основания пирамиды) через середину стороны AB.

Утверждение 3. *Если две смежные боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, то основание высоты пирамиды лежит на биссектрисе угла, образованного теми сторонами основания, через которые проходят эти боковые грани.*

Пусть равны двугранные углы, образуемые с плоскостью основания боковыми гранями ASB и BSC (рис. 3). Если SO — высота пирамиды, а SMO и SKO — линейные углы этих двугранных углов, то прямоугольные треугольники SOM и SOK равны (ибо SO — общий катет и $\angle SMO = \angle SKO$); поэтому $OM = OK$. Но тогда равны прямоугольные треугольники OMB и OKB, а потому $\angle OBA = \angle OBC$. Следовательно, BO — биссектриса угла ABC.

Утверждение 4. *Если боковое ребро пирамиды образует равные углы с двумя примыкающими к нему сторонами основания, то основание высоты пирамиды лежит на биссектрисе угла, образованного этими сторонами основания.*

Пусть $\angle SBA = \angle SBC$ (рис. 3). Проведем высоты SM и SK боковых граней ASB и BSC; прямоугольные треугольники SMB и SKB равны. Отсюда вытекает, что $SM = SK$, а по-

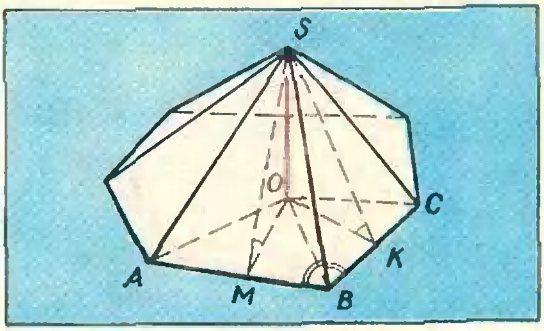


Рис. 3.

тому и $OM = OK$. Но тогда равны прямоугольные треугольники OMB и OKB, вследствие чего $\angle OBA = \angle OBC$.

Утверждение 5. *Если боковое ребро пирамиды перпендикулярно пересекающейся с ним стороне основания, то основание высоты пирамиды находится на перпендикуляре, восставленном (в плоскости основания пирамиды) к этой стороне из точки ее пересечения с этим боковым ребром.*

Действительно, пусть боковое ребро SB пирамиды перпендикулярно стороне AB основания (рис. 4). Опустим высоту SO пирамиды и проведем прямую через точки O и B. По теореме о трех перпендикулярах заключаем, что $OB \perp AB$, то есть основание O высоты пирамиды в самом деле лежит на перпендикуляре, проведенном (в плоскости основания) к стороне основания AB через вершину основания B.

Утверждение 6. *Если боковое ребро пирамиды перпендикулярно скрещивающейся с ним стороне основания, то основание высоты пирамиды находится на перпендикуляре,*

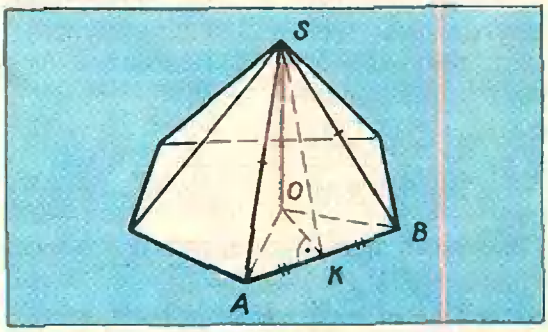


Рис. 2.

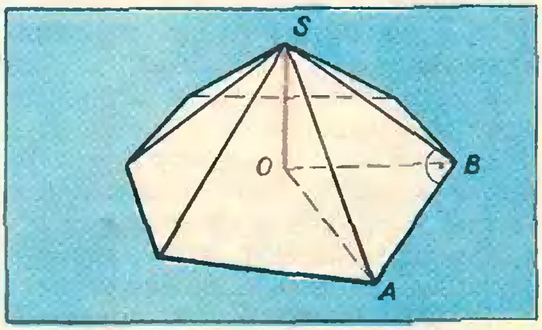


Рис. 4.

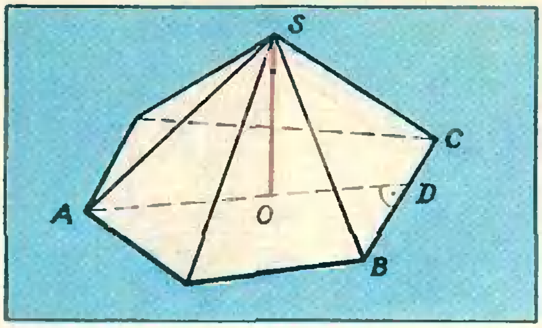


Рис. 5.

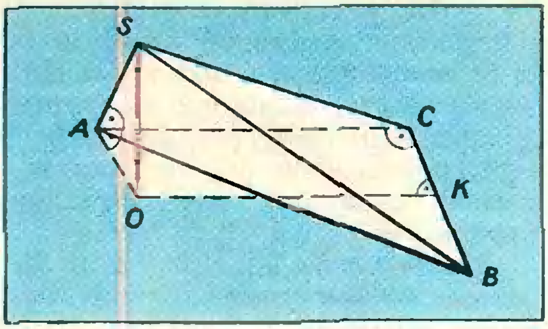


Рис. 6.

опущенном на эту сторону из точки пересечения этого бокового ребра с плоскостью основания.

В самом деле, если боковое ребро SA перпендикулярно стороне BC основания пирамиды (рис. 5), то, проведя высоту SO пирамиды и прямую через точки A и O, по теореме о трех перпендикулярах заключаем, что $OA \perp BC$.

Особенно важным является следующий частный случай утверждения 6: *если боковое ребро треугольной пирамиды перпендикулярно скрещивающейся с ним стороне основания, то основание высоты пирамиды находится на той высоте лежащего в основании пирамиды треугольника, которая опущена на эту сторону.*

Таковы шесть особенностей пирамиды, каждая из которых оказывает свое специфическое влияние на положение ее высоты. Полезно отметить, что если пирамида обладает какими-либо двумя из этих особенностей, то положение высоты пирамиды определяется точно, то есть можно *однозначно* указать точку, являющуюся основанием высоты пирамиды. Вот примеры.

1) *Если боковое ребро пирамиды перпендикулярно плоскости основания, то это боковое ребро и служит высотой пирамиды.*

2) *Если все боковые ребра пирамиды равны между собой, то основанием высоты пирамиды служит центр окружности, описанной около лежащего в основании пирамиды многоугольника.*

3) *Если все боковые грани пирамиды равнонаклонены к плоскости основания, то основанием высоты пирамиды служит центр окружности, вписанной в лежащий в основании пирамиды многоугольник.*

Мы рекомендуем читателям самостоятельно доказать эти утверждения. Перейдем теперь к рассмотрению некоторых задач.

З а д а ч а 1. *Найти объем пирамиды $SABC$, если*

$$SA = BC = 8, AB = SB = SC = 17, AC = 15.$$

Для решения заметим, что $17^2 = 15^2 + 8^2$; отсюда, применяя теорему, обратную теореме Пифагора, к треугольникам ABC и ASC, можно заключить, что

$$\angle ACB = \angle SAC = 90^\circ.$$

Так как $AC \perp AS$ (см. рис. 6), то основание O высоты пирамиды SO лежит на перпендикуляре, восставленном (в плоскости треугольника ABC) в точке A к стороне AC (см. утверждение 5). Далее, так как $SB = SC$, то точка O лежит на перпендикуляре, проведенном (в плоскости треугольника ABC) через середину K отрезка BC (см. утверждение 2).

Следовательно, $ACKO$ — прямоугольник. Теперь из прямоугольного треугольника SOA находим высоту пирамиды:

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{1}{2}BC\right)^2} = 4\sqrt{3},$$

после чего легко определяется объем пирамиды: $V_{SABC} = 80\sqrt{3}$.

З а д а ч а 2. *В пирамиде $SABC$ ребра AS и BC взаимно перпендику-*

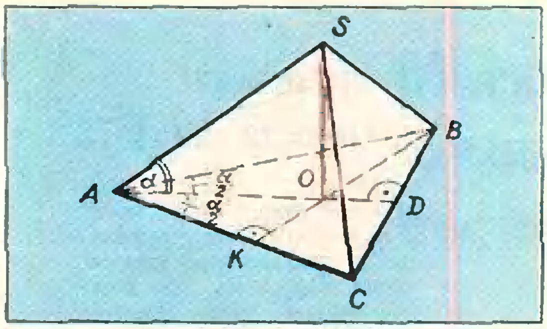


Рис. 7.

лярны, а углы наклона боковых граней ASB и BSC к плоскости основания равны между собой. Определить объем пирамиды, если $AB = 15$, $AC = 13$, $BC = 14$, $SB = 10{,}5$.

Так как $AS \perp BC$ (рис. 7), то основание O высоты пирамиды SO лежит на высоте AN треугольника ABC (см. утверждение 6). Поскольку грани ASB и BSC одинаково наклонены к плоскости ABC, то, согласно утверждению 3, точка O одновременно лежит на биссектрисе BK угла ABC.

Следовательно, основанием O высоты пирамиды является точка пересечения высоты AN и биссектрисы BK треугольника ABC.

Вычислив площадь треугольника ABC по формуле Герона: $S = 84$, легко находим, что

$$AN = 12, \quad BN = 9.$$

Используем, далее, свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника ABN:

$$\frac{ON}{AO} = \frac{BN}{AB}, \quad \frac{x}{12-x} = \frac{9}{15},$$

откуда $ON = x = 4{,}5$. Из прямоугольного треугольника ONB теперь определяем OB, а затем из прямоугольного треугольника SOB вычисляем высоту пирамиды: $OS = 3$. Следовательно, объем пирамиды $V_{SABC} = 84$.

Задача 3. *В треугольной пирамиде $SABC$ боковые ребра SB и SC равны между собой, а углы наклона боковых граней ASB и ASC к плоскости основания равны. Определить объем пирамиды, если $AB = 15$, $BC = 14$, $AC = 13$, $AS = 18$* (рис. 8).

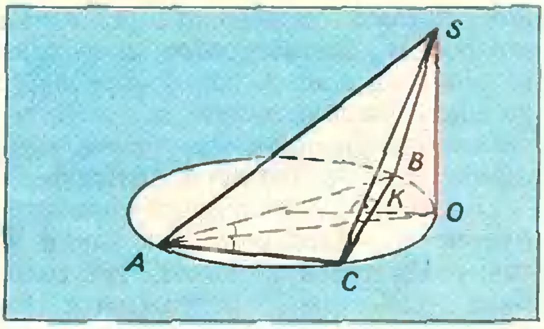


Рис. 8.

Основание O высоты SO будет точкой пересечения перпендикуляра, восставленного к стороне BC в ее середине, и биссектрисы AO угла BAC (см. утверждения 2 и 3). Поскольку $AB \neq AC$, эти прямые пересекаются в единственной точке, являющейся серединой дуги BC окружности, описанной вокруг треугольника BAC. Далее находим: $S_{\triangle ABC} = 84$ (по формуле Герона) и $R_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4S} = \frac{65}{8}$. Отсюда $OK = R - \sqrt{R^2 - KC^2} = 4$, $OC^2 = OK^2 + KC^2 = 65$, $\sin \angle OAC = \sin \angle OCK = \frac{OK}{OC} = \frac{4}{\sqrt{65}}$, $\cos \angle OAC = \frac{7}{\sqrt{65}}$, и по теореме косинусов из $\triangle AOC$ находим AO: $AO = 2\sqrt{65}$ (легко показать, что надо брать больший корень получающегося квадратного уравнения). Теперь $OS = \sqrt{AS^2 - AO^2} = 8$, $V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot 84 \cdot 8 = 224$.

Задача 4. *В основании пирамиды лежит равнобедренный треуголь-*

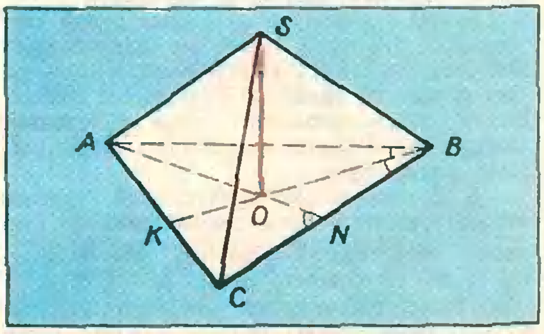


Рис. 9.

ник с боковой стороной a и углом при вершине α. Боковое ребро, исходящее из вершины угла α, образует с плоскостью основания также угол α. Определить объем пирамиды, если ее скрещивающиеся ребра перпендикулярны.

Вершина S пирамиды проектируется на плоскость основания в точку пересечения высот треугольника ABC (см. утверждение 6). Легко найти площадь треугольника ABC (рис. 9): $S=\frac{1}{2}a^2\sin\alpha$. Далее, из $\triangle ABK$ находим: $AK=a\cos\alpha$, из $\triangle AOK$: $AO=\frac{AK}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{a\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ и из $\triangle AOS$: $OS=AO\cdot\operatorname{tg}\alpha=2a\sin\frac{\alpha}{2}$, откуда $V_{SABC}=\frac{1}{3}a^3\sin\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$.

Упражнения

1. Сформулировать утверждения, обратные утверждениям 1—6. Справедливы ли эти обратные утверждения?

2. (МГУ, мехмат, 1961). В треугольной пирамиде высота, проведенная из вершины, попадает в точку пересечения высот треугольника, лежащего в основании. Показать, что тем же свойством обладают и все высоты пирамиды, опущенные из вершин основания на боковые грани.

3. (МГУ, мехмат, 1962). В треугольной пирамиде $SABC$ высота, опущенная из вершины S, проходит через точку пересечения высот треугольника ABC. Кроме того известно, что $SB=b$, $SC=c$, $\angle BSC=90°$. Найти отношение площадей граней ASB и ASC.

4. (МГУ, физфак, 1966). В основании пирамиды лежит правильный треугольник со стороной a. Одна из граней пирамиды перпендикулярна к плоскости основания. Эта грань является равнобедренным треугольником с боковой стороной b, причем $b\neq a$. Найти площадь того сечения пирамиды, которое является квадратом.

5. (МГУ, мехмат, 1971). Все грани треугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, а высота пирамиды совпадает с высотой одной из ее боковых граней. Найти объем пирамиды, если расстояние между наибольшими противоположными ребрами равно единице.

6. В основании треугольной призмы лежит равносторонний треугольник со стороной $\sqrt{11}$ *см*. Определить объем призмы, если ее боковое ребро равно 6 *см*, а одна из вершин верхнего основания удалена от противоположных вершин нижнего основания на 5 *см*.

О признаках делимости на 1973

I признак. Зачеркнуть последнюю цифру числа и прибавить к полученному числу произведение вычеркнутой цифры на 592. Если полученное число делится на 1973, то и исходное число делится на 1973. Последовательно выполняя эту операцию, мы придем к четырехзначному числу.

Пример. Делится ли на 1973 число 2 430 736?

1) 243 073+592·6= =243 073+3552=246 625,

2) 24 662+592·5= =24 662+2960=27 622,

3) 2762+592·2=2762+ +1184=3946.

Но 3946 делится на 1973. Следовательно, 2 430 736 делится на 1973.

II признак. Зачеркнуть последнюю цифру. Оставшееся число умножить на 3 и от полученного результата отнять произведение вычеркнутой цифры на 197. Если полученное число делится на 1973, то и исходное число делится на 1973.

Пример. Делится ли на 1973 число 2 430 736?

1) 243 073·3 — 197·6 = = 729 219 — 1182 = 728 037,

2) 72 803·3 — 197·7 = = 218 409— 1379 = 217 030,

3) 21703·3 — 197·0 = = 65 109,

4) 6510·3 — 197·9 = 19 530 — 1773 = 17 757,

5) 1775·3 — 197·7 = = 5325 — 1379 = 3946,

6) 394·3 — 197·6 = 0.

Следовательно, 2 430 736 делится на 1973.

В. М. Розентуллер

Московский физико-технический институт

Московский физико-технический институт готовит инженеров-физиков-исследователей по новейшим областям физики и техники.

Особенность системы обучения, принятой в физико-техническом институте, состоит в том, что здесь фундаментальное высшее образование сочетается со специальной подготовкой в так называемых базовых научно-исследовательских институтах и конструкторских бюро, где созданы специальные кафедры института.

На первых курсах студентам дается общенаучная подготовка.

Математика, общая и теоретическая физика, общественные науки изучаются в объеме университетских курсов, чтобы будущие специалисты хорошо владели знаниями, составляющими основу образования физика-исследователя. Быстрому ознакомлению с возрастающим потоком научно-технической информации способствует углубленное изучение иностранных языков.

Обучение конкретной специальности и самостоятельная исследовательская работа в базовом институте начинается уже со второго — третьего курсов.

В базовом институте студент слушает лекции по специальности, участвует в работе научных семинаров, глубоко входит в исследовательскую работу лабораторий института. Будущий специалист имеет дело с новейшими приборами; участвует в решении не модельных, специально для его практики придуманных задач, а актуальных проблем, стоящих перед лабораторией. Дипломная работа каждого студента МФТИ входит, как правило, в тематический план базового института. В творческой обстановке научного коллектива студент проходит неоценимую школу воспитания. Работа под непосредственным руководством крупного ученого во многом предопределяет успех его будущей самостоятельной деятельности.

Среди базовых институтов МФТИ — ведущие научные центры Москвы (см. «Квант» № 6, 1972).

Институт готовит специалистов на семи факультетах: факультет радиотехники и кибернетики, факультет общей и прикладной физики, факультет аэрофизики и космических исследований, факультет молекулярной и химической физики, факультет физической и квантовой электроники, факультет аэромеханики и летательной техники, факультет управления и прикладной математики.

На каждом из факультетов подготовка ведется по широкому кругу специальностей, охватывающему большинство областей современной физики, техники и кибернетики.

Ниже мы публикуем варианты вступительных экзаменов по математике и физике 1973 года.

Математика

Вариант I

1. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия содержит член, равный $^1/_2$. Сумма всех членов прогрессии, стоящих до него, равна 60, а сумма всех членов, стоящих после него, равна $^1/_4$. Определить порядковый номер этого члена прогрессии.

2. Две окружности радиусов R и r $(R>r)$ имеют внутреннее касание в точке A. Через точку B, лежащую на большей окружности, проведена прямая, касающаяся меньшей окружности в точке C. Определить длину отрезка AB, если $BC=a$.

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\log_2(y+x)-\log_2 x=2\log_4 2+\log_2(3y-x) \\ \log_2\dfrac{xy+3}{x^2-y+3x+1}-2\log_4\dfrac{y}{x}=0. \end{cases}$$

4. Решить уравнение:

$$\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\cos x\cdot\cos 2x}=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos 2x\cdot\cos 3x}.$$

5. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной 4 *см*, а длина каждого бокового ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 равна 6 *см*. Прямой круговой цилиндр расположен так, что его ось лежит в плоскости BB_1D_1D, а точки A_1, C_1, B_1 и центр O квадрата $ABCD$ лежат на боковой поверхности цилиндра. Определить радиус цилиндра.

Вариант 2

1. Две бесконечно убывающие геометрические прогрессии таковы, что первый член первой прогрессии является знаменателем второй, а знаменатель первой прогрессии является первым членом второй прогрессии. Отношение суммы первой прогрессии к сумме квадратов всех ее членов равно $^8/_3$, а такое же отношение для второй прогрессии равно $^9/_2$. Найти сумму каждой из этих прогрессий.

2. Окружность радиуса R проходит через вершину A равнобедренного треугольника ABC, касается основания BC в точке B и пересекает боковую сторону AC в точке D. Определить длину боковой стороны AB, если $AD:DC=k$.

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_2(65-2^{2+y})=4-y \\ \log_2\dfrac{2x+y}{y-2x+6}=\log_2(x-1)-\log_2(2-x). \end{cases}$$

4. Решить уравнение:

$\operatorname{tg} x+2\operatorname{tg} 2x+3\operatorname{ctg} 3x+4\operatorname{ctg} 4x=0.$

5. Сторона основания ABC правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 1 *см*, а каждое из боковых ребер имеет длину $\frac{1}{\sqrt{3}}$ *см*. Прямой круговой цилиндр расположен так, что точка A_1 и середина M ребра CC_1 лежат на его боковой поверхности, а ось цилиндра параллельна прямой AB_1 и отстоит от нее на расстоянии $^1/_4$ *см*. Определить радиус цилиндра.

Физика

Билет 1

1. Груз весом $P=1\,T$ опускается с помощью лебедки с постоянной скоростью $v=4$ *м/с* (рис. 1). Какова будет максимальная сила натяжения троса при внезапной остановке лебедки, если коэффициент упругости троса равен $k=0{,}5$ *Т/см*? Весом троса и трением пренебречь.

2. Когда количество водяных паров в воздухе больше (и во сколько раз) — после месяца затяжных дождей с мокрым снегом в ноябре при 0° С и относительной влажности 95% или после месяца сухой жары в июле при 35° С и влажности 40%? Давление насыщенного пара при 0° С — 4,6 *мм рт. ст.*, при 35° С — 42 *мм рт. ст.*

3. Протекающий через сопротивление $R=100$ *ом* ток изменяется во времени по закону $I=k\sqrt{t}$, где $k=1$, если время измеряется в секундах, а ток — в амперах. Какое время протекал ток, если на сопротивлении выделилось количество тепла $Q=3{,}5$ *кдж*?

4. В спектре излучения аргонового лазера наиболее интенсивными являются линии с длинами волн $\lambda_1=4{,}88\cdot10^{-5}$ *см* и $\lambda_2=5{,}15\cdot10^{-5}$ *см*. При каких значениях преломляющего угла α призмы, поставленной на пути лучей (рис. 2), из призмы выйдет пучок, содержащий компоненту λ_2 и не содержащий компоненту λ_1? На первую грань призмы лучи падают нормально. Зависимость показателя преломления материала призмы от длины волны имеет вид:

$$n=1+\frac{a}{\lambda^2},\quad \text{где}\quad a=2{,}38\cdot10^{-9}\ см^2.$$

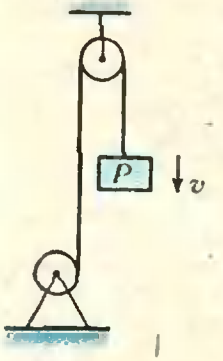


Рис. 1.

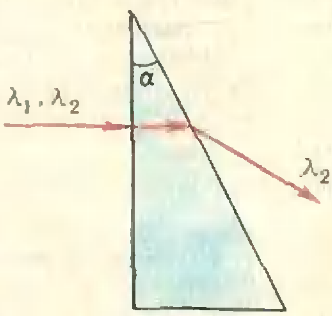


Рис. 2.

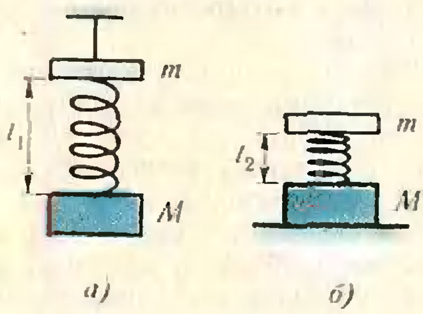


Рис. 3.

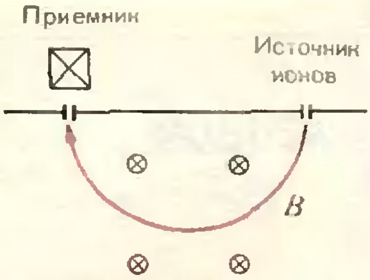


Рис. 4.

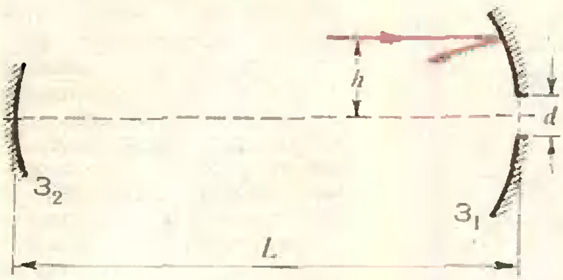


Рис. 5.

Билет 2

1. Пружина скрепляет два груза, массы которых m и M (рис. 3). Когда система подвешена за верхний груз (положение *а*), длина пружины равна l_1. Если систему поставить на подставку (положение *б*), длина пружины равна l_2. Определить длину ненапряженной пружины l_0.

2. В вертикально расположенном сосуде сечения s, закрытом поршнем массы m, находится воздух. Когда на поршень положили свинцовую болванку массы M, расстояние его от дна цилиндра уменьшилось в n раз. Во сколько раз изменилась температура воздуха в цилиндре? Внешнее давление равно p_0.

3. В масс-спектрометре пучок ионов проходит ускоряющую разность потенциалов U и через выходную щель попадает в однородное поперечное магнитное поле с индукцией B (рис. 4). После прохождения дуги окружности в 180° ионы попадают в приемник. Найти расстояние между входной щелью приемника и выходной щелью ускоряющей камеры. Отношение заряда иона к его массе q/m считать известным.

4. В оптической системе, предназначенной для задержки во времени короткого светового импульса, используется многократное отражение света от двух вогнутых сферических зеркал $З_1$ (радиус кривизны $R_1 = 10$ *м*) и $З_2$ (радиус кривизны $R_2 = 1$ *м*), расположенных на расстоянии $L = 5{,}5$ *м* друг от друга (рис. 5). В центре зеркала $З_1$ имеется отверстие диаметра $d = 2$ *мм*. На это зеркало на высоте $h = 15$ *см* от оси падает короткий световой импульс в виде тонкого луча, параллельного оси. Оценить, через какое время этот луч выйдет через отверстие.

Кольца Сатурна

Среди планет Солнечной системы Сатурн — единственная планета, окруженная кольцами. Этих колец четыре. Последнее, почти невидимое, было открыто всего два года назад.

Недавно американские ученые Томас Макдонаф и Нил Брайс выдвинули гипотезу о существовании у Сатурна пятого кольца. По их мнению «виновником» возникновения этого кольца является самый большой из 10 спутников Сатурна — Титан. Титан является в Солнечной системе уникальным. Он — единственный спутник планеты, обладающий атмосферой. Плотность воздуха атмосферы Титана почти такая же, как у Земли (воздух Титана состоит главным образом из водорода и метана). Плотная атмосфера Титана постоянно рассеивается: находящиеся в верхних слоях атмосферы частицы воздуха, скорость которых достаточно велика, выходят из сферы притяжения спутника. Частицы, «вырвавшиеся» из сферы притяжения Титана, попадают в мощное гравитационное поле Сатурна и «выводятся» на орбиту вокруг планеты. Таков, по мнению американских ученых, механизм образования нового кольца Сатурна.

Т. П.

Книга о Вселенной

К концу 50-х годов нашего столетия развитие астрономии, физики, биологии и ряда других наук позволило на научной основе подойти к решению издавна интересовавшей человечество проблемы о существовании жизни вне Земли и, в частности, о существовании жизни разумной. Если в предшествовавший период ученым приходилось поневоле ограничиваться отдельными догадками, а проблема в целом была отдана на откуп писателям-фантастам, то теперь появились конкретные научные исследования условий возникновения жизни, распространенности жизни, в том числе и разумной, во Вселенной, возможности связи с внеземными цивилизациями. Были проведены и экспериментальные работы. В 1959 году американские ученые Д. Коккони и Ф. Моррисон рассмотрели возможность связи между цивилизациями с помощью электромагнитных волн и предложили искать сигналы внеземных цивилизаций на природном стандарте длин волн — вблизи радиолинии с длиной волны 21 *см*, испускаемой межзвездным нейтральным водородом. Уже в 1960 году эта идея нашла практическое воплощение: с помощью радиотелескопа, зеркало которого имело диаметр 27 *м*, Ф. Дрейк в США в течение нескольких месяцев пытался уловить сигналы искусственного происхождения от двух близких к нам звезд, похожих на Солнце: ε Эридана и τ Кита. Сигналов поймать не удалось, но первые попытки вряд ли и могли дать положительный результат.

Мы упомянули только о двух работах, а таких исследований появилось довольно много. Возникла необходимость обобщения всех этих новых результатов по проблеме, находящейся на стыке многих наук. Пожалуй, первым таким обобщающим трудом явилась популярная монография известного советского астрофизика, ныне члена-корреспондента Академии наук СССР и члена Национальной Академии наук США И. С. Шкловского «Вселенная, жизнь, разум», выпущенная Издательством АН СССР в 1962 году. Написанная живо и увлекательно, она вместе с тем отличается достаточной научной строгостью, хотя по необходимости содержит и множество гипотез.

В соответствии со своим названием книга разделена на три части. Первая часть посвящена проблемам астрономии. Это — систематический рассказ о небесных телах и их системах, о физических условиях на них, об их эволюции. Раздел этот имеет самостоятельную ценность, так как дает хорошее представление о современном состоянии астрономии. Во второй части автор рассматривает условия, необходимые для возникновения и развития жизни на планетах, анализирует понятие «жизнь» и исследует возможность существования жизни на других планетах Солнечной системы. Последняя, третья часть охватывает различные стороны проблемы «Разумная жизнь во Вселенной». Здесь и обсуждение возможности осуществления межзвездной связи оптическими и радиометодами, а также с помощью автоматических зондов, соображения о темпах развития человечества, о возможностях прямых контактов между различными цивилизациями и многое другое.

Книга И. С. Шкловского получила широкую известность как в нашей стране, так и за рубежом. В 1965 году вышло ее второе издание, а в 1973 году — третье (переработанное и дополненное)*). За 11 лет, прошедших с момента выпуска первого издания книги, появилось множество научных статей и ряд монографий, посвященных рассматриваемой проблеме; прошло также несколько международных совещаний.

С помощью наземных установок и космических аппаратов продолжалось изучение физических условий на планетах и спутниках Сол-

*) Шкловский И. С. Вселенная, жизнь, разум. Изд. третье, дополненное и переработанное. М., «Наука», 1973.

нечной системы. Выяснилось, например, что условия на Венере вряд ли допускают возможность существования на ней каких-либо форм жизни. С большой степенью уверенности можно говорить и об отсутствии жизни на Луне. Условия на Марсе оказались гораздо более суровыми, чем предполагали раньше, что, конечно, усилило позиции скептиков, отрицающих возможность существования жизни на этой планете. Снимки спутников Марса — Фобоса и Деймоса, — полученные автоматической межпланетной станцией, свидетельствуют о том, что это огромные глыбы естественного происхождения, усеянные кратерами — следами столкновения с другими телами. Эти снимки опровергают гипотезу автора книги об искусственном происхождении спутников Марса, которой в первых двух изданиях уделялось довольно много места и от которой И. С. Шкловский в третьем издании отказывается. Много нового узнали исследователи и о других планетах Солнечной системы.

В связи с общепризнанной идеей о том, что благоприятные условия для возникновения жизни существуют только на планетных телах, небезынтересны и результаты поисков планет у других звезд. Особенно впечатляющи исследования так называемой звезды Барнарда, одной из самых близких к Солнцу. Вокруг этой звезды обращаются по крайней мере три планеты, близкие по своей массе к Юпитеру. Теперь можно не сомневаться в широкой распространенности планетных систем во Вселенной.

Развивались теоретические и экспериментальные исследования проблемы связи с внеземными цивилизациями, главным образом, с помощью радиосигналов. Опыты Дрейка были повторены, в частности, и в Советском Союзе, в Горьком, под руководством В. С. Троицкого. Исследовались 12 звезд, довольно близких к Солнцу (удаленных от него на 10—60 световых лет). И в этом случае никаких искусственных сигналов обнаружено не было. Сейчас разрабатываются более чувствительные системы, способные принимать сигналы от объектов, удаленных от нас на тысячи световых лет.

Продолжались исследования условий, необходимых для возникновения и развития жизни на планетах, а также попытки решения важнейшего вопроса о путях возникновения живого вещества из неживого.

Некоторые итоги проводившегося в течение 10—15 лет комплексного научного изучения проблемы существования жизни на других мирах и возможности установления связи с внеземными цивилизациями были подведены на советско-американском совещании ученых, состоявшемся в сентябре 1971 года в Бюраканской обсерватории (Армения). Были приглашены и ученые ряда других стран. На совещании присутствовали астрономы, физики, радиофизики, кибернетики, биологи, лингвисты, антропологи, историки, социологи. Уже это простое перечисление специальностей ученых, принявших участие в работе совещания, дает некоторое представление о широте круга рассматривавшихся на нем вопросов.

Готовя третье издание своей книги, автор учел результаты всех новых исследований и итоги Бюраканского совещания, которому он посвятил отдельную главу.

Книга И. С. Шкловского дает отчетливое и полное представление о современном состоянии исследований в области рассматриваемой проблемы. Эту книгу смело можно рекомендовать широкому кругу читателей, интересующихся современным естествознанием. Следует, однако, помнить, что это — не развлекательная брошюра, а книга, требующая определенной подготовки, и читать ее нужно внимательно.

И. Е. Евгеньев

Кант и часы

Один из крупнейших немецких философов Иммануил Кант (1724—1804), профессор Кенигсбергского университета вел столь размеренный образ жизни, что граждане Кенигсберга проверяли свои часы, когда видели как он выходит из своего дома и направляется быстрым шагом на лекции в университете.

Однажды вечером Кант с ужасом заметил, что его настенные часы остановились. К тому же свои карманые часы он накануне отдал ремонтировать. Однако он придумал как выйти из создавшегося положения.

Кант завел часы. Заметив положение стрелок, он отправился к своему другу Шмидту, который жил примерно на расстоянии одного километра от дома философа. При входе в квартиру Шмидта Кант взглянул на часы, висевшие в коридоре. Уходя от Шмидта, он снова посмотрел на часы. Домой Кант возвращался по тому же пути, которым шел к Шмидту, своим обычным размереным шагом. Прийдя домой Кант немедленно и точно поставил стрелки своих часов.

Как Кант узнал точное время?

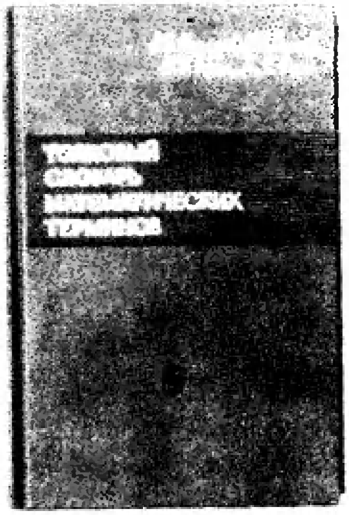
Л. К.

Что такое «центроид»?

Любая современная наука обладает своим специфическим языком, в котором используются весьма много специальных терминов. Более того, развитие науки приводит к увеличению ее словаря, так что зачастую ученые одной специальности, но разной специализации с трудом понимают друг друга. Очень ярко, а, может быть, и наиболее ярко, это свойство современной науки проявляется в математике. Иногда учителю математики трудно разобраться в современной работе, например, по математической логике. Особенно это проявилось в связи с введением новой программы по математике. В таких случаях хорошую помощь может оказать толковый словарь.

Издательство «Просвещение» проявило ценную инициативу, издав «Толковый словарь математических терминов» *). Основная цель этого словаря — оказать помощь учителям математики и школьникам в ознакомлении с математической терминологией. Со времени издания этой книги прошло достаточно времени, так что уже можно подвести некоторые итоги, оценить, в какой мере удалось авторам словаря решить стоявшую перед ними весьма сложную задачу.

Прежде всего факты: выпущенный тиражом 102 тысячи (большими тиражами физико-математическая редакция издает разве что пособия для абитуриентов), словарь исчез с прилавков буквально в 2—3 недели. И, например, автор настоящей заметки, не сумев приобрести его в магазине, вынужден был прибегнуть к помощи знакомых. Быстрое исчезновение словаря с прилавков книжных магазинов свидетельствует прежде всего о насущной необходимости подобного издания. Но вот то, что за прошедшие 8 лет этот словарь являлся весьма редким гостем букинистов (пришлось не полениться и обойти несколько московских букинистических магазинов; диалог был примерно таким: «У вас есть словарь математических терминов?» — Нет.» — «А бывает?» — «Да, бывает, но редко»), позволяет надеяться, что словарь оказался полезным его владельцам, и, как говорят математики, отсюда следует, что авторы словаря достигли намеченной цели. Хотя опять-таки, может, дело лишь в том, что других изданий, способных заменить словарь, просто нет, а «на безрыбье и рак — рыба».



Попытаемся оценить содержание словаря по существу. В последнее время в различных исследованиях широкое распространение получил так называемый «метод экспертных оценок», суть которого в двух словах сводится к следующему: если какому-либо объекту или явлению трудно или даже невозможно дать точную количественную объективную оценку, обращаются к помощи нескольких экспертов-специалистов, выводят некую среднюю из оценок, данных этими экспертами, которую и приписывают исследуемому объекту. В качестве субъективной оценки одного из таких экспертов будем рассматривать настоящую заметку. Прежде чем выставить свою оценку, попытаемся ее хоть немного обосновать. Написание всякого словаря начинается с составления перечня слов, которые собираются в него включить. Поскольку словарь предназначается в помощь учителям и школьникам, то вполне естественно выглядит весьма полное представительство в словаре терминов, относящихся к элементарной математике. Ограниченные объемом книги, авторы при сборе терминов, относящихся к высшей математике, бесспорно вынуждены руководствоваться собственными вкусами. Мне кажется разумным тяготение авторов к тем разделам высшей математики, которые изучаются на младших курсах большинства высших учебных заведений (дифференциальное и интегральное исчисление, высшая алгебра), а также к геометрическим дисциплинам, т. е. к разделам, непосредственно примыкающим к школьной элементарной математике и в настоящее время уже вошедшим в пробные школьные учебники. Хотя и здесь можно найти немало терминов, несправедливо, на мой взгляд обойденных авторами (например, «коразмерность», «признаки сходимости рядов»). Это, однако, в большой степени объясняется размерами словаря (приблизительно 1800 терминов). Для сравнения отметим, что изданный в ГДР в 1961 году небольшой двухтомный математический словарь содержит около 200 тысяч слов. А ведь большинство немецких терминов имеет русские эквиваленты.

*) Мантуров О. В., Солнцев Ю. К., Соркин Ю. И., Федин Н. Г. Толковый словарь математических терминов. М., «Просвещение», 1965.

Теперь о содержании статей. Как и должно было бы быть, опять-таки наиболее подробными и полными являются статьи, относящиеся к разделам элементарной математики, и, что особенно важно, авторы очень внимательно отнеслись к определениям в элементарной математике, в то время как в различных других изданиях — школьных учебниках и даже «Большой Советской Энциклопедии» — определения не всегда точны. Например, довольно часто встречается такое определение призмы: «Призмой называется многогранник, у которого две грани — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани — параллелограммы». Это определение неверное (почему? — проверьте это самостоятельно), о чем и говорится в соответствующей статье справочника.

Конечно, не все термины элементарной математики объяснены достаточно полно, в частности, статью «Косинусов теорема» неплохо было бы пополнить теоремой косинусов для четырехугольника, но в целом этот раздел словаря заслуживает самой высокой оценки.

Что касается терминов, относящихся к различным разделам высшей математики, то, к сожалению, они объясняются иногда не столь тщательно. Тут и не совсем верное определение числа «e» (статья «Замечательные пределы»), и ошибочная формулировка леммы Гейне—Бореля. В ряде статей имеются ссылки на отсутствующие в словаре статьи. Так, в статье «Случайная величина» есть ссылки на отсутствующую статью «Распределения закон», но зато в словаре имеется статья «Распределение», на которую и следовало сослаться. В статье «Рефлексивность» есть ссылка на статью «Бинарные отношения», которой в словаре нет.

В ряде статей, связанных друг с другом взаимоссылками, по-разному обозначаются одинаковые элементы. Так, в статьях «Группа», «Группоид», «Квазигруппа» элементы множеств обозначаются малыми латинскими буквами (a, b, c,...), а в статье «Полугруппа» они же обозначаются большими латинскими буквами (A, B, C,...). Список неточностей, погрешностей и опечаток можно было бы, к сожалению, продолжить. Но не они определяют лицо этого интересного и весьма нужного словаря. Не делая скидок авторам, можно считать, что в общем «первый блин» отнюдь не вышел комом.

Чего бы мне хотелось пожелать авторам словаря? Во-первых, более тщательно подойти к отбору терминов, которые будут включены в словарь. Может быть, стоило бы обратиться к ведущим специалистам в различных отраслях математики с просьбой просмотреть перечень терминов и пополнить его, если они сочтут необходимым. Во-вторых, учесть недочеты, отмеченные как в этой рецензии, так и в других критических выступлениях, письменных и устных, причем особенно важно учесть мнение тех, кому этот словарь в первую очередь предназначен. И тогда, будем надеяться, словарь получит еще более высокую оценку.

И, наконец, несколько слов в адрес издательства. Было бы целесообразно продолжить эту ценную инициативу и как можно скорее переиздать эту весьма нужную и полезную книгу. Мы надеемся, что в ближайшее время «Толковый словарь математических терминов» уже можно будет купить в магазине, не прибегая к помощи знакомых.

Ну, а что такое «центроид» да и многое другое, вы узнаете, прочитав эту книгу.

К. И. Кашин

Еще одна олимпиада

15 апреля 1973 года в городе Скопле проходила XVI республиканская математическая олимпиада школьников Македонии. Ниже мы приводим некоторые из предлагавшихся на ней задач.

1. Докажите, что если $1+x+y=0$, то $1+x^3+y^3=3xy$.

2. Дана прямая p и две точки A и B не лежащие на ней. Среди треугольников ABX, где X — точка прямой p найти треугольник с наименьшим периметром.

3. Про равнобедренный треугольник ABC известно, что его можно разбить на два равнобедренных треугольника. Найти углы этого треугольника.

4. Дано уравнение $a^4x^2+6a^2bx+5b^2=0$; $a, b\neq 0$
а) Докажите, что его корни действительны при любых значениях параметров;
б) Выясните при каких значениях параметров выполняется соотношение
$$\frac{x_1+x_2}{3}=\frac{x_1x_2}{5}+1.$$

5. В точке B окружности с диаметром AB проведена касательная. Найти точку окружности, равноудаленную от точки A и касательной.

6. Пусть AB — диаметр окружности, а M — некоторая точка, не лежащая ни на окружности ни на прямой AB. Пусть A_1 и B_1 точки пересечения прямых MA и MB и окружности, а S — точка пересечения прямых AB_1 и A_1B. Докажите, что прямая MS перпендикулярна к AB.

7. Пусть k нечетное положительное число. Докажите, что произведение k последовательных нечетных чисел делится на k.

М. Л.

Новые книги

В этом номере мы продолжаем публиковать аннотации на книги, выходящие в 1973 году и представляющие интерес для наших читателей.

В IV квартале 1973 года выйдут в свет следующие книги (заказы можно направлять через магазины «Книга—почтой»).

МАТЕМАТИКА

Издательство «Наука»

1. Дорофеев Г. В., Потапов М. И., Розов Н. Х. *Пособие по математике для поступающих в вузы (избранные вопросы элементарной математики)*. Издание 3-е, переработанное и дополненное (объем 30 л., тираж 300 000 экз., цена 1 р. 04 к.).

В книге доступно и популярно изложены отдельные важные разделы элементарной математики. Анализируя решения задач вступительных экзаменов в вузы, авторы уделяют много внимания разбору типичных ошибок, допускаемых абитуриентами.

Книга будет полезна не только абитуриентам, но и учителям средней школы.

При подготовке 3-го издания авторами был учтен опыт вступительных экзаменов последних лет.

2. Зайцев В. В., Рожков В. В., Сканави М. М. *Элементарная математика*. Издание 2-ое, переработанное и дополненное (объем 25 л., тираж 200 000 экз., цена 1 р. 08 к.).

Книга представляет собой систематическое изложение элементарной математики. Изложение теоретических вопросов сопровождается разбором задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах в различные вузы.

Книга рассчитана на учителей средней школы, учеников 10-х классов и лиц, готовящихся к вступительным экзаменам в вузы.

3. Розенфельд Б. А., Сергеева И. Д. *Стереографическая проекция* (объем 4 л., тираж 30 000 экз., цена 15 к.).

Книга посвящена изложению метода проектирования сферы на плоскость и применению этого вида проектирования в астрономии и географии.

Последний раздел книги посвящен изложению геометрии Лобачевского и, в частности, рассказывает о проектировании плоскости Лобачевского на обычную плоскость.

Книга рассчитана на учителей средней школы и на школьников 9 и 10 классов.

4. Розенфельд Б. А., Рожанская М. М., Соколовская З. К. *Абу-р-Райхан ал-Беруни* (объем 15 л., тираж 10 000 экз., цена 95 к.).

Книга посвящена жизни и деятельности крупнейшего ученого средневековья — Беруни *).

Книга рассчитана на широкий круг читателей, включая школьников старших классов.

Издательство «Мир»

5. Фаермарк Д. С. *Задача пришла с картины* (объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 60 к.).

Эта своеобразная книга построена на интересном сюжете. Отталкиваясь от известной картины Н. П. Богданова-Бельского «Устный счет», автор рассказывает о жизни художника и о его картине. Обращаясь к математической задаче, условие которой написано на картине, автор рассказывает о многих задачах, связанных с целыми числами, об истории этих задач и о крупных русских, советских и зарубежных ученых, внесших большой вклад в теорию чисел.

Написанная ярким эмоциональным языком, книга безусловно будет интересна широким кругам читателей.

6. Гасс С. *Занимательное путешествие по стране линейного программирования* (объем 12 л., тираж 75 000 экз., цена 62 к.).

В книге популярно и доходчиво изложены вопросы линейного программирования. Автор, не вникая в детали и опуская сложные расчеты, очень доходчиво рассказывает о переходе от конкретных задач к их математическим моделям, как соотносится эта модель с реальной действительностью. Рассказывая о возникших при этом трудностях, автор показывает пути их преодоления.

В специальном математическом приложении (которое можно опустить при первом чтении) автор более детально знакомит читателя с математическими вопросами линейного программирования.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

Издательство «Просвещение»

7. Колягин Ю. М., Луканкин Г. Л. *Основные понятия в школьном курсе математики* (объем 20 л., тираж 100 000 экз., цена 85 к.).

В книге излагаются основные понятия математики (теория множеств, элементы математической логики, аксиоматика, равенства, уравнения, геометрические преобразования векторов и так далее) применительно к школьному курсу математики.

Книга будет полезна учителям математики средней

---

*) См. «Квант», 1973, № 9, с. 2.

школы. Ее также с интересом прочтут школьники старших классов.

М. Л. Смолянский

ФИЗИКА

Издательство «Наука»

1. Смородинский Я. А., Шварцбург А. Б. *Законы механики* (объем 15 л., тираж 100 000 экз., цена 62 к.).

В книге, основываясь только на материале школьного курса физики, подробно разбираются задачи движения материальной точки на плоскости, колебания, движение жидкости и газа, законы небесной механики.

Книга предназначена школьникам старших классов, но она также будет полезна учителям физики, ведущим факультативные занятия.

2. *Физика. Часть II. Оптика и волны.* Под редакцией Ахматова А. С., издание 2-е (объем 20 л., тираж 100 000 экз., цена 1 р. 29 к.).

Эта книга является переводом американского учебника для средней школы по курсу общей физики. Полный курс состоит из четырех частей: «Вселенная», «Оптика и волны», «Механика», «Электричество и строение атома».

Публикуемая вторая часть курса «Оптика и волны» явится полезным дополнением к существующим учебникам по физике.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, имеющих отношение к школьному курсу физики.

3. *Над чем думают физики.* Выпуск 10. *Атомное ядро* (объем 12 л., тираж 50 000 экз., цена 60 к.).

Сборник научно-популярных статей, переведенных из американского журнала «Scientific American», посвящен достижениям физики атомного ядра и их приложениям.

Статьи написаны крупными специалистами-физиками. Их с интересом прочтут и учителя средней школы, и любознательные школьники старших классов.

Издательство «Атомиздат»

4. Гладков К. А. *Атом от А до Я.* Издание 2-е, переработанное и дополненное (объем 12 л., тираж 150 000 экз., цена 60 к.).

Это—маленькая энциклопедия ядерной физики, дающая простое, но достаточно полное представление о ядерной физике.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

Издательство «Просвещение»

5. Балаш В. А. *Задачи по физике и методы их решения.* Издание 3-е, переработанное и дополненное (объем 25 л., тираж 100 000 экз., цена 85 к.).

В этой книге, предназначенной в первую очередь для лиц, готовящихся к конкурсным экзаменам в институт, собраны задачи повышенной трудности по всему курсу физики. Эти задачи предлагались на вступительных экзаменах в ряде московских вузов (МГУ, МИФИ, МФТИ и так далее). Все задачи приведены с подробными решениями. Краткие теоретические вводки перед каждым разделом помогают вспомнить законы, лежащие в основе решения задач.

Книга полезна школьникам 9—10 классов.

6. Кац Ц. Б. *Биофизика на уроках физики* (объем 10 л., тираж 40 000 экз., цена 40 к.).

В книге излагаются элементы биофизики и бионики.

Она представляет интерес для учителей физики средней школы и для школьников старших классов.

7. Прокофьев О. Н. *Удивительное рядом* (объем 6 л., тираж 100 000 экз., цена 20 к.).

В этой книге рассказывается о новой науке — бионике.

Книга представляет интерес для учащихся 8—10 классов.

НАУЧНАЯ ФАНТАСТИКА

Издательство «Молодая гвардия»

1. Альтов Г. *Третье тысячелетие* (объем 12 л., тираж 100 000 экз., цена 62 к.).

Научно-фантастический роман, рассказывающий о далеком будущем Земли, о дальних космических путешествиях людей, о встречах с обитателями иных планет и контактах с ними.

Роман построен на остроприключенческом сюжете.

2. Жемайтис О. *Багряная звезда* (объем 10 л., тираж 100 000 экз., цена 50 к.).

Научно-фантастическая повесть о первой советской экспедиции на Марс. Космонавты раскрывают многие загадки таинственной планеты и, главное, находят следы великой цивилизации, существовавшей сотни тысяч лет назад.

3. Журавлева В. *Золотые кони дерзания* (объем 15 л., тираж 100 000 экз., цена 70 к.).

Книга научно-фантастических рассказов о жизни и открытиях психолога Киры Сафрай. Наука подходит к великим открытиям в психологии, приближается к расшифровке тайн творчества. Показать человека, который сделает для психологии то, что сделали Эйнштейн и Бор для физики, показать пути к открытиям, драму идей — такую цель преследует автор этого сборника. В этом своеобразие, привлекательность и смысл книги.

Т. С. Петрова

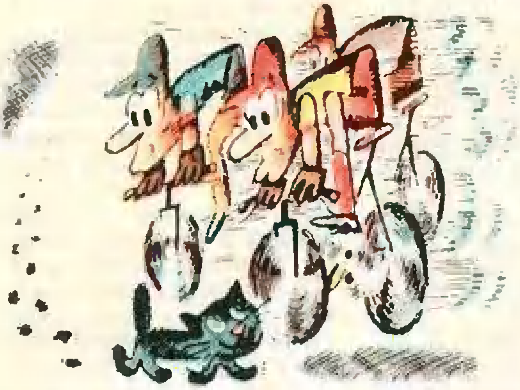
«Квант» для младших школьников

Задачи

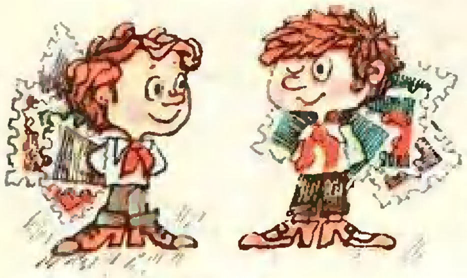
1. Расшифруйте умножение

```
        *   *   *
        *   *   *
    ---------------
    *   6   *   *
*   *   6   6
6   *   6
-------------------
*   *   *   *   *
```

2. Велосипед имеет передний и задний тормоз. В каком порядке их нужно включать при резкой остановке?



3. Я и мой друг приобрели за 3 дня 18 марок. Сегодня я купил столько марок, сколько мой друг вчера и сегодня, но зато позавчера он купил на 2 марки больше, чем я вчера и позавчера. Сколько же марок приобрел каждый из нас?

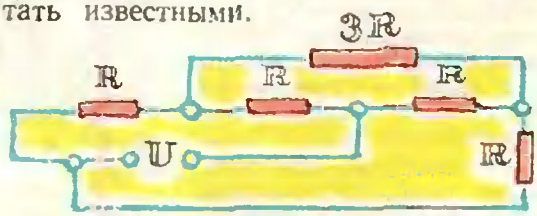


4. Что произойдет, если включенный электронагреватель вынуть на некоторое время из воды?

5. В кузове грузовой машины оставили бревно с гвоздем в середине. Бревно при движении машины свободно каталось в кузове и царапало дно. Какая часть дна кузова может быть испорчена?

Размеры кузова: 3 *м* × 2 *м*; длина бревна 2 *м*.

6. Какой ток идет через сопротивление $3R$ в схеме, показанной на рисунке? Величины всех сопротивлений и напряжение U считать известными.



Художник Э. В. Назаров

А. С. Варпаховский

Тайны совершенных чисел и дружественных пар

В восьмом номере нашего журнала за 1971 год была опубликована заметка И. Я. Депмана об истории так называемых совершенных чисел — чисел, равных сумме своих делителей. В продолжение этой темы мы помещаем переработанную статью М. Гарднера *), в которой рассказывается о замечательных свойствах этих чисел. Публикация для «Кванта» подготовлена А. С. Варпаховским.

Пожалуй, ни одни числа не имеют такой захватывающей истории, как числа совершенные и их ближайшие родственники — дружественные числа.

Первый важный шаг в построении теории совершенных чисел был сделан еще Евклидом, который установил, что формула $2^{n-1}(2^n-1)$ дает совершенное число всякий раз, когда множитель в скобках оказывается простым (для этого необходимо, чтобы n было простым, хотя далеко не для всякого простого числа n число 2^n-1 также является простым).

Вот доказательство теоремы Евклида. Пусть у числа $2^{n-1}(2^n-1)$ множитель в скобках простой. Тогда делителями этого числа, отличными от самого числа, будут

$$1, 2, 4, \ldots, 2^{n-1},$$
$$(2^n-1), 2(2^n-1), 4(2^n-1), \ldots, 2^{n-2}\times\times(2^n-1).$$

Возьмем сумму всех этих делителей:

$$(1+2+4+8+\ldots+2^{n-1})+$$
$$+(1+2+4+8+\ldots+2^{n-2})\times\times(2^n-1)=(2^n-1)+(2^{n-1}-1)\times\times(2^n-1)=2^{n-1}(2^n-1).$$

Следовательно, число $2^{n-1}(2^n-1)$ — совершенное.

*) Scientific American», 1968, № 3.

Спустя 2000 лет Леонард Эйлер доказал, что формула Евклида определяет все четные совершенные числа. Любопытно, что до сих пор никому не удалось найти нечетное совершенное число, и, возможно, такого вообще не существует. Поэтому в дальнейшем, говоря о совершенных числах, мы будем подразумевать четные совершенные числа. Удивительная формула Евклида тесно связана с обычной геометрической прогрессией со знаменателем 2 (1, 2, 4, 8, 16, . . .). Вспомним древнюю историю о персидском царе и авторе шахматной игры. Восхищенный этой игрой, царь предложил автору самому выбрать себе награду. Тот, на первый взгляд, изъявил очень скромное желание, попросив положить на первую клетку шахматной доски одно зернышко пшеницы, на вторую — два зернышка, на третью — четыре и таким способом заполнить все 64 клетки. Оказалось, что число зерен в последней клетке равно 9 223 372 036 854 775 808, а удвоенное это число без 1 равно суммарному числу зерен на доске, что в несколько тысяч раз превышает годовой урожай пшеницы во всем мире. Написав в каждой клетке шахматной доски число зерен, которое должно быть в ней, и забрав из каждой клетки по одному зернышку, увидим, что оставшееся в клетке

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}
2^{16}	2^{17}	2^{18}	2^{19}	2^{20}	2^{21}	2^{22}	2^{23}
2^{24}	2^{25}	2^{26}	2^{27}	2^{28}	2^{29}	2^{30}	2^{31}
2^{32}	2^{33}	2^{34}	2^{35}	2^{36}	2^{37}	2^{38}	2^{39}
2^{40}	2^{41}	2^{42}	2^{43}	2^{44}	2^{45}	2^{46}	2^{47}
2^{48}	2^{49}	2^{50}	2^{51}	2^{52}	2^{53}	2^{54}	2^{55}
2^{56}	2^{57}	2^{58}	2^{59}	2^{60}	2^{61}	2^{62}	2^{63}

Рис. 1.

число зерен в формуле Евклида определяется выражением $2^n - 1$. Если это число простое, то, умножив его на число зерен в предыдущей клетке, то есть на 2^{n-1}, получим совершенное число. (см. рис. 1).

Простые числа ряда $2^n - 1$ называют числами Мерсенна по имени французского математика XVII века, занимавшегося их изучением *). На

*) См. также «Квант», 1971, № 8, с. 3.

рисунке 1 закрашены те клетки, в которых после вычитания 1 получаются числа Мерсенна. Таких клеток на доске 9 — им соответствуют первые девять совершенных чисел.

Совершенные числа обладают рядом таинственных и вместе с тем замечательных свойств. Например, все совершенные числа «треугольные». Это означает, что если взять, допустим, шарики в количестве, равном совершенному числу, то их можно расположить так, что они образуют равносторонний треугольник.

Иначе говоря, каждое совершенное число есть сумма вида $1 + 2 + 3 + + 4 + \ldots + n$.

Также легко можно заметить, что каждое совершенное число, за исключением 6, есть частичная сумма ряда из кубов нечетных чисел $1^3 + 3^3 + + 5^3 + \ldots$

А вот еще одно свойство совершенных чисел: сумма обратных значений делителей совершенного числа, включая и само число как делитель, всегда равна 2. Так, для числа 28 имеем

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = 2.$$

До сегодняшнего дня остаются без ответа два важных вопроса: существует ли нечетное совершенное число и существует ли наибольшее четное совершенное число? До сих пор не найдено ни одного нечетного совершенного числа, но вместе с тем и не доказано, что такого числа не существует. Ответ на второй вопрос зависит от того, является ли ряд простых чисел Мерсенна бесконечным, так как каждое простое число этого ряда приводит к совершенному числу. Было замечено, что при подстановке первых четырех чисел Мерсенна (3, 7, 31, 127) вместо n в формулу $2^n - 1$ снова получаются числа Мерсенна. Более 70 лет математики надеялись, что такая закономерность должна привести к заключению о бесконечности ряда простых чисел Мерсенна. Однако в 1953 году вычислительная машина разрушила их надежды. Было обнаружено, что в случае $n = 2^{13} - 1 = 8191$ (простое число Мерсенна) число $2^{8191} - 1$ не просто. Так до сих пор и не известно, является ли ряд Мерсенна бесконечным или в нем имеется самое большое число.

Оре в книге «Теория чисел и ее история» цитирует забавное высказывание Питера Барлоу из его книги «Теория чисел», вышедшей в 1811 году. Барлоу, вычислив девятое совершенное число, заявил, что «это наибольшее число, которое когда-либо будет найдено, потому что совершенные числа не более чем любопытны и вряд ли кому-либо придет в голову пытаться найти большее совершенное число». Однако в 1876 году французский математик Эдвард Лукас, автор классической четырехтомной работы по занимательной математике, объявил об открытии двенадцатого совершенного числа $2^{126}(2^{127} - 1)$. Позднее у Лукаса появились сомнения в том, что $2^{127} - 1$ есть простое число Мерсенна, но впоследствии его простота подтвердилась. $2^{127} - 1$ — наибольшее число Мерсенна, найденное без помощи вычислительной машины. В таблице 1 приведены выражения по формуле Евклида для 23 известных совершенных чисел, выписаны первые восемь из них (дальнейшие числа содержат слишком много знаков) и указано число десятичных знаков для каждого из этих чисел. Последнее известное совершенное число, которое имеет 22 425 делителей, появилось на свет в 1963 году после того, как вычислительная машина Иллинойского университета обнаружила 23-е число Мерсенна. В честь этого события на почтовых отправлениях математического отделения университета ставили штамп с надписью: «$2^{11213} - 1$ — простое число».

Обобщением совершенных чисел являются дружественные числа. Возьмем любое число и просуммируем его делители для получения второго числа. Затем просуммируем делители второго числа и так далее в надежде, что в конце концов мы придем к исходному числу. Если исходное число получается на первом шаге, то, значит, цепочка имеет лишь одно звено, а само число — совершенное. При двузвенной цепочке два числа образуют дружественную пару: сумма делителей одного из чисел равна другому числу. Наименьшие дружественные числа, образующие пару, равны 220 и 284.

В 1636 году Пьер Ферма нашел другую дружественную пару чисел: 17 296 и 18 416. Он и Рене Декарт независимо друг от друга дали правило образования дружественных пар, не подозревая, что это правило было сформулировано еще в IX веке одним арабским астрономом *). Третью пару нашел Декарт: 9 363 584 и 9 437 056. В XVIII веке Эйлер опубликовал

*) Жителем месопотамского города Харрана — Абу-л-Хасаном Сабитом ибн Корра ибн Марван ас-Саби ал-Харрани (ок. 830—901). (*Прим. ред.*)

Таблица 1

	Формула	Число	Количество знаков
1	$2^{1}(2^{2}-1)$	6	1
2	$2^{2}(2^{3}-1)$	28	2
3	$2^{4}(2^{5}-1)$	496	3
4	$2^{6}(2^{7}-1)$	8 128	4
5	$2^{12}(2^{13}-1)$	33 550 336	8
6	$2^{16}(2^{17}-1)$	8 589 869 056	10
7	$2^{18}(2^{19}-1)$	137 438 691 328	12
8	$2^{30}(2^{31}-1)$	2 305 843 008 139 952 128	19
9	$2^{60}(2^{61}-1)$		37
10	$2^{88}(2^{89}-1)$		54
11	$2^{106}(2^{107}-1)$		65
12	$2^{126}(2^{127}-1)$		77
13	$2^{520}(2^{521}-1)$		314
14	$2^{606}(2^{607}-1)$		366
15	$2^{1278}(2^{1279}-1)$		770
16	$2^{2202}(2^{2203}-1)$		1 327
17	$2^{2280}(2^{2281}-1)$		1 373
18	$2^{3216}(2^{3217}-1)$		1 937
19	$2^{4252}(2^{4253}-1)$		2 561
20	$2^{4422}(2^{4423}-1)$		2 663
21	$2^{9688}(2^{9689}-1)$		5 834
22	$2^{9940}(2^{9941}-1)$		5 985
23	$2^{11212}(2^{11213}-1)$		6 751

список 64 дружественных пар, однако, как показала позднейшая проверка, в двух случаях он ошибся. В 1830 году Адриен Мари Лежандр нашел еще одну дружественную пару, а в 1867 году шестнадцатилетний итальянский юноша Б. И. Паганини удивил математический мир, объявив, что числа 1184 и 1210 — дружественные. Это была вторая по величине пара, которую все проглядели. И хотя, возможно, Паганини нашел эту пару методом проб и ошибок, имя его навсегда вошло в историю теории чисел.

Сегодня известны более 600 дружественных пар; многие числа пар состоят более чем из 30 цифр. Последняя известная пара была вычислена на ЭВМ в 1964 году. В таблице 2 приведены дружественные пары в диапазоне чисел от 0 до 100 000.

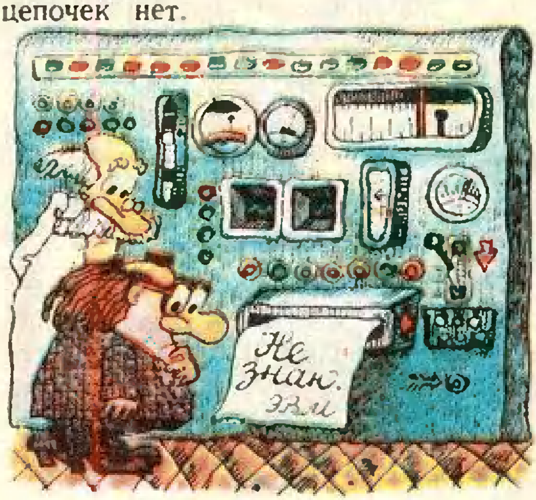
Все известные дружественные пары состоят либо из двух четных чисел, либо (что гораздо реже) из двух нечетных. Но никто не доказал, что не существует дружественной смешанной пары. Брэтли и Мак-Кэй выдвинули гипотезу, что все нечетные дружественные числа кратны 3, а сумма чисел, образующих дружественную пару, кратна 9. Никто еще не предложил общей формулы для всех дружественных пар, и неизвестно, конечно или бесконечно число таких пар.

В настоящее время известны только две цепочки чисел, которые приводят к исходному числу и имеют

Таблица 2

1	220	284
2	1 184	1 210
3	2 620	2 924
4	5 020	5 564
5	6 232	6 368
6	10 744	10 856
7	12 285	14 595
8	17 296	18 416
9	63 020	76 084
10	66 928	66 992
11	67 095	71 145
12	69 615	87 633
13	79 750	88 730

больше чем два звена. В 1918 году французский математик П. Пуле нашел цепочку из пяти звеньев (12 496, 14 288, 15 472, 14 536, 14 264) и поразительную цепочку из 28 звеньев (28 — совершенное число), которая начинается с числа 14 316. А вот трехзвенную цепочку до сих пор найти не удалось, несмотря на обширные поиски с помощью ЭВМ. И эти поиски будут продолжаться до тех пор, пока не встретится трехзвенная цепочка или пока какой-нибудь математик, специализирующийся в теории чисел, не докажет, что таких цепочек нет.



Ответы, указания, решения

К статье «Оценки углов»

2. Если точка D находится внутри треугольника ABC, то хотя бы один из 6 углов, на которые AD, BD и CD делят углы треугольника, не больше $30°$. В силу этого нам достаточно рассмотреть случай, когда выпуклая оболочка точек не содержит внутри себя ни одной точки. Далее заметьте, что сумма всех углов n-угольника равна $180° (n-2)$, а диагонали делят эти углы на $n\ (n-2)$ частей. См. также указание к задаче 3.

3. Предположим, что точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ пронумерованы так, что $\angle A_nA_1A_2$ — угол k-угольника M ($k \leqslant n$), являющегося выпуклой оболочкой данных точек, и что лучи $A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, \ldots, A_1A_{n-1}, A_1A_n$ следуют один за другим именно в таком порядке (все эти лучи проходят внутри или по границе угла $A_2A_1A_n$; некоторые из них могут и совпадать). Если B — точка на продолжении луча A_1A_n за A_1, то $180° = \angle BA_1A_n = \angle BA_1A_2 + \angle A_2A_1A_3 + \angle A_3A_1A_4 + \ldots + \angle A_{n-1}A_1A_n = \angle A_1A_2A_n + \angle A_1A_nA_2 + \angle A_2A_1A_3 + \ldots + \angle A_{n-1}A_1A_n$. Поэтому если все углы $A_iA_jA_k$ не меньше β, то $180° \geqslant n\beta$, откуда $\beta \leqslant \frac{180°}{n}$.

Величина $\frac{180°}{n}$ угла β достигается для системы n точек, совпадающей с вершинами правильного n-угольника. При этом для того, чтобы выписанное выше неравенство обращалось в равенство для каждой вершины многоугольника M, необходимо и достаточно, чтобы M был правильным n-угольником.

4. а) Выпуклая оболочка 4-х точек может быть или четырехугольником, или треугольником, внутри которого лежит четвертая точка, или отрезком. В первом случае хотя бы один из углов четырехугольника не меньше $90°$; во втором случае хотя бы один из «внутренних» углов не меньше $120°$; в третьем случае четыре угла равны $180°$.

б) Выпуклая оболочка 5-ти точек может быть или пятиугольником, или четырехугольником, или треугольником, или отрезком (последний случай интереса не представляет, здесь $\alpha = 180°$). В первом случае хотя бы один из углов пятиугольника не меньше $\frac{3}{5} \cdot 180° = 108°$, в третьем случае хотя бы один из углов не меньше $120°$. Наконец, если выпуклая оболочка — четырехугольник, то пятая точка лежит внутри одного из двух треугольников, на которые четырехугольник разбивает его диагональ; тем самым этот случай сводится к уже разобранному.

в) Если выпуклая оболочка — шестиугольник, то хотя бы один его угол не меньше $\frac{4}{6} \cdot 180° = 120°$; в противном случае найдутся либо 3 точки, лежащие на одной прямой (тогда $\alpha = 180°$), либо точка, лежащая внутри треугольника, образованного тремя другими точками (этот треугольник — либо выпуклая оболочка данных точек, либо одна из частей выпуклой оболочки, на которые ее разрезают выходящие из одной вершины диагонали).

Для случая четырех точек значение $\alpha = 90°$ достигается для вершин любого прямоугольника; аналогично этому в задачах 4б и 4в наименьшее значение α достигается для вершин выпуклого многоугольника с равными углами.

5. Так как уже для шести точек плоскости наибольший из образованных ими углов не меньше $120°$, то это справедливо и для любого большего числа точек. При этом и значение $\alpha = 120°$ при большем числе точек недостижимо, так как иначе к а ж д ы е шесть из рассматриваемых (разных!) точек должны являться вершинами шестиугольника с углами в $120°$, что невозможно.

Далее достаточно рассмотреть (скажем, центрально-симметричный) шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ с углами по $120°$, причем такой, что $A_1A_2 \ll A_2A_3 \ll A_3A_4$ (знак $\ll$ означает «много меньше»), точки A_7A_8 находятся на биссектрисах углов A_3 и A_6 шестиугольника на одинаковом и очень малом расстоянии от вершин A_3 и A_6; тогда наибольший из углов, образованных точками $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$, будет незначительно превосходить $120°$ (сделайте примерный чертеж).

6. а) Если выпуклая оболочка M данных точек — отрезок, то $\alpha^{(2)} = 180°$; если M — треугольник, то минимум два «внутренних» угла не меньше $90°$. Пусть теперь M — четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ и A_1 — самый большой из углов этого четырехугольника; тогда $\angle A_1A_2A_3 + \angle A_2A_3A_4 + \angle A_3A_4A_1 + \angle A_4A_1A_3 + \angle A_2A_1A_3 = 360°$ и, следовательно, хотя бы один из этих углов не меньше $\frac{1}{5} \cdot 360° = 72°$. Значение $\alpha^{(2)} = 72°$ достигается, если все рассматриваемые углы равны $72°$.

б) Если выпуклая оболочка M данных точек — отрезок, то $\beta^{(2)} = 0°$; если M — треугольник, то два наименьших угла M — острые, каждый из них делится на две части, меньшая из частей не больше $45°$. Наконец, если M — четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$, то $\angle A_1A_2A_4 + \angle A_2A_4A_1 + \angle A_2A_1A_3 + \angle A_4A_1A_3 = 180°$ и $\angle A_4A_2A_3 + \angle A_2A_4A_3 + \angle A_1A_3A_1 + \angle A_4A_3A_1 = 180°$; в каждой из этих сумм хоть один из углов не больше $45°$.

Значение $\beta^{(2)} = 45°$ реализуется, например, для квадрата.

7. Рассмотрите n точек, лежащих на одной прямой.

11. Оба результата сразу следуют из того, что сумма всех 12 углов, задаваемых четырьмя точками, равна 720° (сумма углов четырех треугольников); поэтому хотя бы один из углов не меньше $\frac{1}{12}\cdot 720° = 60°$ и хотя бы один из углов не больше 60°.

Значения $\varphi = 60°$ и $\psi = 60°$ реализуются лишь для системы P_4, состоящей из вершин правильного тетраэдра.

15. См. решение задачи М130, «Квант» № 11, 1972.

16. а) Лишь 3 точки.

б) Рассмотрим «выпуклую оболочку» наших точек, то есть наименьший выпуклый многогранник M, содержащий внутри себя или на границе все данные точки (M можно представить себе как многогранник, ограниченный «резиновой пленкой», натянутой на наши точки и стремящейся сократить свою поверхность).

В рассматриваемом случае ни одна из точек не может находиться внутри M и все грани M — остроугольные треугольники (в силу результата задачи 16а).

Пусть теперь пять точек удовлетворяют условию задачи. В таком случае M имеет пять вершин, то есть, если P и Γ — число ребер и граней многогранника M, то

$$5 - P + \Gamma = 2$$

(теорема Эйлера; см., например, «Квант» № 4, 1972, статья А. П. Савина «Карты и раскраски»). С другой стороны, так как каждая из Γ граней содержит по три ребра и каждое ребро принадлежит двум граням, то $3\Gamma = 2P$, то есть

$$P = \frac{3}{2}\Gamma,$$

откуда сразу можно найти, что $\Gamma = 6$ и $P = 9$. С другой стороны, если B_3 и B_4 — число 3-гранных и 4-гранных углов M, то $B_3 + B_4 = 5$ и $3B_3 + 4B_4 = 2P = 18$, откуда вытекает, что $B_3 = 2$ и $B_4 = 3$. Так устанавливается, что M обязательно является «треугольной бипирамидой», то есть состоит из двух треугольных пирамид $ABCD$ и $ABCE$, сложенных общим основанием ABC.

Теперь, используя то, что все 10 треугольников ABC, ABD, ..., CDE являются остроугольными, с использованием теоремы косинусов устанавливается, что, например,

$$AB^2 + AC^2 > DB^2 + DC^2 \qquad (*)$$

(это неравенство далее потребуется).

Рассмотрим теперь шесть точек, удовлетворяющих условию задачи. В этом случае аналогично первой части решения с использованием теоремы Эйлера устанавливается, что выпуклая оболочка M данных точек может быть либо «четырехугольной бипирамидой $ABCDEF$», то есть многогранником, образованным двумя четырехугольными пирамидами $ABCDE$ и $ABCDF$, сложенными общим основанием $ABCD$, либо «искривленной пятиугольной пирамидой» $ABCDEF$, в которой точка F соединена со всеми вершинами «искривленного пятиугольного основания $ABCDE$, составленного из трех примыкающих треугольников ABC, ACD и ADE. В первом случае, дважды применяя неравенство (*) к 5-вершинникам $ACDEF$ и $ABCEF$, мы получим

$$FA^2 + FC^2 > EA^2 + EC^2 \text{ и } EA^2 + EC^2 > FA^2 + FC^2,$$

что невозможно; во втором случае, применяя то же неравенство к 5-вершинникам $ACDEF$ и $ABCDE$, получим

$$CF^2 + CA^2 > DF^2 + DA^2$$

и

$$DF^2 + DA^2 > CF^2 + CA^2,$$

что, разумеется, тоже невозможно.

Итак, наибольшее число точек, совместимое с условиями задачи, равно 5.

К статье «Окрестность фигуры»

1. Указание. Полученный многоугольник содержит 1-окрестность исходного многоугольника.

2. $V = 1 + 6\varepsilon + 12\cdot\frac{\pi\varepsilon^2}{4} + \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3 =$

$= 1 + 6\varepsilon + 3\pi\varepsilon^2 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3.$

4. Можно рассуждать так же, как при решении задачи 2 в тексте. Проверьте, что отношение площади правильного треугольника со стороной 1 к площади его 1-окрестности $\frac{\sqrt{3}}{12 + \sqrt{3} + 4\pi}$ больше $^1/_{16}$.

6. Решение. Нужно доказать, что внутри многоугольника есть точка, отстоящая от его контура более чем на $\frac{S}{P}$, то есть не принадлежащая $\frac{S}{P}$-окрестности контура многоугольника. Часть этой окрестности, расположенная внутри многоугольника, заштрихована на рис. 1. Высота каждого из прямоугольников, изображенных на

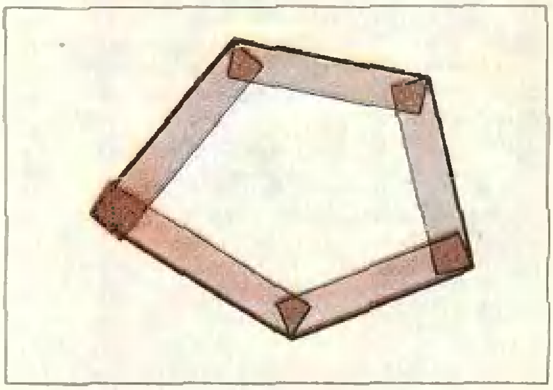


Рис. 1.

этом рисунке, равна $\frac{S}{P}$. Площадь заштрихованной фигуры меньше суммы площадей прямоугольников, то есть меньше $\frac{S}{P}\cdot P=S$. Следовательно, в многоугольнике остаются незаштрихованные точки, что и требовалось доказать.

К статье «Высота пирамиды»

3. $\frac{b}{c}$.

4. $\left(\frac{a\sqrt{2a^2+4b^2}}{2a+\sqrt{2a^2+4b^2}}\right)^2$. Указание. Показать, что рассматриваемая пирамида обладает лишь одной парой взаимно-перпендикулярных скрещивающихся ребер. Доказать затем, что плоскость искомого сечения параллельна этим взаимно перпендикулярным скрещивающимся ребрам.

5. $^2/_3$. Указание. Пусть $SABC$ — данная пирамида; показать, что $AB=AC=$ $=BS=CS$ и $AS=BC$, а высота SO пирамиды лежит в грани BSC. Доказать затем, что SA и BC — наибольшие ребра пирамиды.

6. 22 *см*^{3}.

К статье «Московский физико-технический институт»

Математика

Вариант 1

1. Номер члена равен 5.

2. Пусть O, O_1 — центры данных окружностей (рис. 2). Касательная BC может занимать любое из двух положений, указанных на рисунке 2. Пусть D — точка пересечения AB с меньшей окружностью. Соединим точки B и O, а также D и O_1. Треугольники OBA и O_1DA — равнобедренные ($OB=OA=R$, $O_1D=O_1A=r$), поэтому углы OBA, OAB, O_1DA равны. Это означает, что прямые OB и O_1D — параллельны. Обозначим длины отрезков BD и AB соответственно x и y. Тогда, учитывая, что $AD=$ $=y-x$, из подобия треугольников O_1DA и OBA получаем:

$$\frac{y-x}{y}=\frac{r}{R}. \qquad (1)$$

Кроме того,

$$y\cdot x=a^2 \qquad (2)$$

(BA — секущая, BC — касательная к меньшей окружности).

Из уравнений (1) и (2) находим:

$$y=a\sqrt{\frac{R}{R-r}}.$$

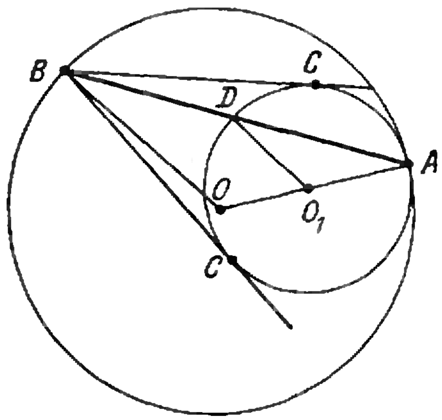


Рис. 2.

3. В обоих уравнениях системы переходим к логарифмам по основанию 2 и потенцируем:

$$\begin{cases}\dfrac{(y+x)^2}{x}=2(3y-x)\\[2mm]\dfrac{xy+3}{x^2-y+3x+1}=\dfrac{y}{x}.\end{cases}$$

После упрощения этой системы получим:

$$\begin{cases}y^2-4xy+3x^2=0\\ y^2-3xy+3x-y=0.\end{cases} \qquad (1)$$

Второе уравнение системы (1) преобразовываем к виду: $(y-3x)(y-1)=0$. Рассмотрим последовательно два случая

1) $y=1$. Из первого уравнения системы (1) получаем: $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{3}$. Подстановка значений (1, 1) и $(\frac{1}{3}, 1)$ в оба уравнения исходной системы обращает их в тождества. Поэтому пары чисел (1, 1), $(\frac{1}{3}, 1)$ будут решениями этой системы.

2) $y=3x$. При таких y первое уравнение системы (1) превращается в тождество. Подстановка значений $x=c$, $y=3c$ в оба уравнения исходной системы превращает их в тождества лишь при $c>0$. Поэтому пары чисел $(c, 3c)$ будут решениями этой системы при $c>0$.

Решение $(\frac{1}{3}, 1)$, полученное в случае (1) является одним из решений вида $(c, 3c)$ при $c=\frac{1}{3}$.

4. После приведения левой части к общему знаменателю преобразуем ее к виду

$$\frac{\cos 2x+1}{\cos x\cdot\cos 2x}=\frac{2\cos^2 x}{\cos x\cdot\cos 2x}=\frac{2\cos x}{\cos 2x}.$$

Второе слагаемое правой части уравнения переносим в левую часть и снова приводим ее к общему знаменателю

$$\frac{2\cos x\cdot\cos 3x+1}{\cos 2x\cdot\cos 3x}=\frac{\cos 4x+\cos 2x+1}{\cos 2x\cdot\cos 3x}=$$

$$=\frac{2\cos^2 2x+\cos 2x}{\cos 2x\cdot\cos 3x}=\frac{2\cos 2x+1}{\cos 3x}.$$

Теперь уравнение имеет вид

$$\frac{2\cos 2x+1}{\cos 3x}=\frac{1}{\sin x},$$

откуда

$$\frac{2\sin x\cos 2x+\sin x}{\cos 3x}=1,$$

$$\frac{\sin 3x-\sin x+\sin x}{\cos 3x}=1,$$

$$\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=1,\quad \operatorname{tg} 3x=1.$$

Последнее уравнение имеет те же решения, что и исходное, при условии, что

$$\sin x\neq 0,\ \cos x\neq 0,\ \cos 2x\neq 0,\ \cos 3x\neq 0 \quad (1)$$

Далее находим: $3x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$ Теперь определим, при каких n для этих значений x будут выполнены условия (1). Очевидно, $\cos 3x=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right)\neq 0$ при $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$ Условие $\sin x\neq 0$, $\cos x\neq 0$, $\cos 2x\neq 0$ эквивалентно условию $\sin 4x\neq 0$, то есть $x\neq\frac{\pi}{4}p$, $p=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots$

Решив уравнение $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}=\frac{\pi}{4}p$ относительно целых чисел n при p — целых, найдем, что $n=3k+2$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$ Значит, для $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, где n — целое, $n\neq 3k+2$, $k=0,\ \pm1,\ \ldots$ Условие (1) выполнено, и эти значения представляют собой все решения исходного уравнения.

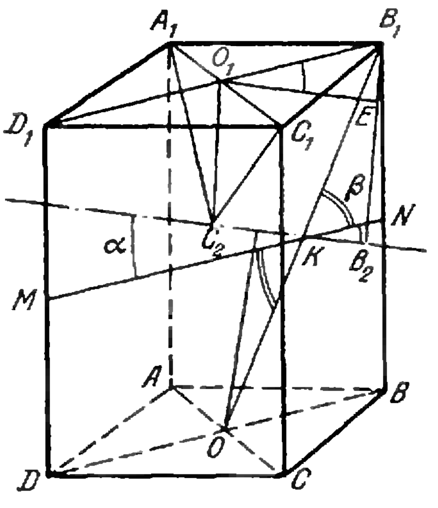


Рис. 3.

5. Рассмотрим два случая:

1) Ось цилиндра пересекает прямую OB_1. Тогда нетрудно видеть, что она пересекает ее в середине K отрезка OB_1. Через точку K проведем отрезок MN параллельно DB (рис. 3), тогда $B_1N=NB=3$ *см*, $KN=\frac{1}{2}OB=\sqrt{2}$ *см*. Пусть угол $B_1KN=\beta$, тогда $KB_1\sin\beta=B_1N=3$ *см*, $KB_1\cdot\cos\beta=KN=\sqrt{2}$ *см*. Обозначим угол, образуемый осью цилиндра с прямой MN через α,

$$-\beta<\alpha<\pi-\beta. \quad (I)$$

Опустим из точек B_1, C_1, A_1 перпендикуляры на ось цилиндра — B_1B_2, C_1C_2, A_1C_2 соответственно. При этом заметим, что прямая A_1C_1 перпендикулярна плоскости B_1D_1DB, а потому перпендикуляр O_1C_2, проведенный из точки O_1 к оси цилиндра, будет проекцией наклонных C_1C_2 и A_1C_2 на плоскость B_1D_1DB, значит и сами наклонные C_1C_2 и A_1C_2 будут перпендикулярны оси цилиндра. В треугольнике KB_1B_2 имеем $B_1B_2=R=KB_1\sin(\beta+\alpha)=(3\cos\alpha+\sqrt{2}\sin\alpha)$ *см*, где R — радиус цилиндра. Проведем O_1E перпендикулярно B_1B_2. Очевидно, что угол B_1O_1E равен α. Тогда в треугольнике B_1O_1E имеем $B_1E=O_1B_1\cdot\sin\alpha=2\sqrt{2}\cdot\sin\alpha$ *см*. Теперь $O_1C_2=EB_2=B_1B_2-B_1E=(3\cos\alpha-\sqrt{2}\sin\alpha)$ *см*. Наконец, в треугольнике $C_2O_1C_1$ имеем $C_1C_2^2=R^2=C_2O_1^2+O_1C_1^2$. Подставив сюда полученные выражения для R, C_2O_1 и $O_1C_1=2\sqrt{2}$ *см*, будем иметь:

$$(3\cos\alpha+\sqrt{2}\sin\alpha)^2=(3\cos\alpha-\sqrt{2}\sin\alpha)^2+8.$$

Решив это уравнение, найдем

$$\alpha=\frac{(-1)^n}{2}\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\pi}{2}n,$$
$$n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

Условию (I) удовлетворяют только два значения: $\alpha_0=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\alpha_1=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$, причем оба угла α_0 и α_1 находятся в интервале от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Далее находим $\sin\alpha_0=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\alpha_0=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sin\alpha_1=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\cos\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Значит, $R_0=3\cos\alpha_0+\sqrt{2}\sin\alpha_0=\frac{4}{3}\sqrt{6}$ *см*, $R_1=\frac{5}{3}\sqrt{3}$ *см*.

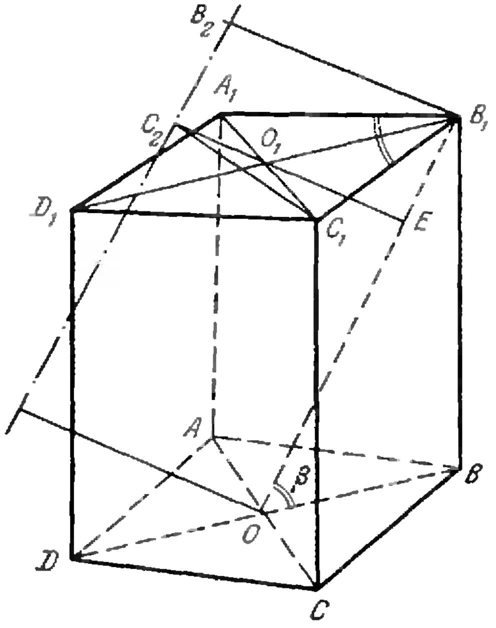


Рис. 4.

2) Ось цилиндра параллельна прямой OB_1. В этом случае OB_1—образующая цилиндра. Проведем из точек B_1, C_1, A_1 перпендикуляры к оси цилиндра—B_1B_2, C_1C_2, A_1C_2 (рис. 4). Как и в случае 1), отрезок O_1C_2 перпендикулярен оси цилиндра, а его продолжение O_1E перпендикулярно прямой OB_1. Находим: $OB_1 = 2\sqrt{11}$ *см*, $\sin\beta = \frac{3}{\sqrt{11}}$, $O_1E = 6\sqrt{\frac{2}{11}}$ *см*. Далее, $C_2E = B_2B_1 = R$, $C_2O_1 = \left(R - 6\sqrt{\frac{2}{11}}\right)$ *см* и в треугольнике $C_2O_1C_1$ имеем $C_2C_1^2 = C_2O_1^2 + O_1C_1^2$, то есть

$$R^2 = \left(R - 6\sqrt{\frac{2}{11}}\right)^2 + 8,$$

откуда

$$R_3 = \frac{20}{3}\sqrt{\frac{2}{11}} \text{ см}.$$

Вариант 2

1. $S_1 = \frac{3}{4}$, $S_2 = \frac{2}{3}$.
2. $AB = R\sqrt{\frac{4k+3}{k+1}}$.
3. $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$, $(c, -2)$, где $1 < c < 2$.
4. $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4} + \pi n$,

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

5. $R = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Физика

Билет 1

1. $10\ T$.
2. $\frac{m_{VII}}{m_{XI}} = 3,5$.
3. $t = 8,4\ c$.
4. $0,5 < \sin\alpha < 0,526$.

Билет 2

1. $l_0 = \frac{ml_1 + Ml_2}{m + M}$.
2. $\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{p_0 + \frac{m+M}{S}g}{p_0 + \frac{m}{S}g}$.
3. $d = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}$.
4. $t \approx \frac{6L}{c} = 1,1 \cdot 10^{-7} c$.

К задачам «На клетчатой бумаге»

(см. «Квант» № 9, 1973, с. 17)

Смотри рисунок 5.

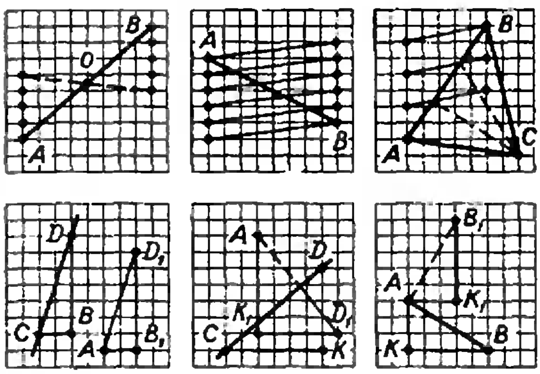


Рис. 5.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» № 9, 1973)

1. Петя живет на 5-м этаже.
2. $8126 \times 2 = 16\,252$.
3. Масса толстого конца больше.
4. При нагревании вода, которая содержится в древесине, расширяется и разрывает древесные волокна.
5. Давая задний ход, машинист сдвигает буфера всех вагонов. Когда после этого он трогает состав вперед, вагоны начинают двигаться по одному, и машинист может сдвинуть состав.

К задаче М189.

Указание. Длина биссектрисы $l = \frac{2ab}{a+b}\cos\varphi/2$, где a и b—длины сторон, заключающих биссектрису, а φ — угол между ними.

К задачам (см. с. 21)

1. Если A и B — две наиболее удаленные друг от друга точки, то все остальные точки лежат на окружности (соответственно на сфере) S с диаметром AB.

а) 3 или 4.

б) Исключим две наиболее удаленные друг от друга точки A и B, пусть C и D — наиболее удаленные из оставшихся точек. Тогда все точки лежат на сфере S с диаметром AB и сфере s с диаметром CD, то есть все точки принадлежат пересечению S и s; далее надо отдельно рассмотреть случаи, когда S и s совпадают и когда они не совпадают.

В первом случае рассмотрение множества («геометрического места») таких точек M, что$\triangle ABM$ — прямоугольный, сразу приводит к выводу, что, кроме A, B, C, D, мы не имеем ни одной точки. Во втором случае с использованием теоремы Пифагора легко устанавливается, что если точки A, B, M и N удовлетворяют условию задачи, то либо $\sphericalangle AMN = \sphericalangle BNM = 90°$, либо $\sphericalangle ANM = \sphericalangle BMN = 90°$, откуда также можно вывести, что ни одной точки, отличной от A, B, C и D, рассматриваемое множество точек не содержит.

Итак, число точек здесь также равно 3 или 4.

2. Сколь угодно большое. В самом деле, пусть, скажем, на плоскости уже выбрано n точек A_1, A_2, . . ., A_n, удовлетворяющих условию задачи. Соединим между собой каждые две точки A_i и A_j и через A_i и A_j проведем перпендикулярно к A_iA_j прямые, которые ограничивают некоторую «полосу», причем все точки, лежащие вне этой полосы, образуют с A_i и с A_j тупоугольный треугольник. Построенные полосы не могут заполнять всю плоскость, ибо каждая прямая, не параллельная ни одной из них, пересекает совокупность всех полос по конечному числу отрезков и, значит, содержит точки, не принадлежащие ни одной полосе. Присоединив такую точку A_{n+1} к имеющимся n точкам, мы получим совокупность $n+1$ точек, удовлетворяющих условию задачи.

Корректор Н. Б. Румянцева

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.
«Квант 10», тел. 234-08-11. Сдано в набор 7/VII-73 г.
Подписано в печать 19/VIII-73 г.
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,50 Уч. изд. л. 6,80 Тираж 349 170 экз.
Т-11200. Цена 30 коп. Заказ 1296

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

НА МАРКАХ — ОСНОВОПОЛОЖНИКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Открытие дифференциального и интегрального исчисления принадлежит к числу важнейших достижений математической мысли. Оно составило целую эпоху в развитии всех точных наук.

Дифференциальное и интегральное исчисление было создано почти одновременно Исааком Ньютоном (1643—1727) и Готфридом Вильгельмом Лейбницем (1646—1716). Портреты этих великих ученых вы видите на марках, выпущенных во Франции и ФРГ.

На фото приведена также французская марка с портретом Рене Декарта (1596—1650), заложившего основы аналитической геометрии. Он ввел понятие переменной величины, без которого открытия Ньютона и Лейбница были бы невозможны. На марке Декарт изображен на фоне своих сочинений, слева раскрыта одна из его знаменитых книг «Рассуждение о методе».

Дальнейшее развитие дифференциальное и интегральное исчисление получило в трудах Леонарда Эйлера (1707—1783), Жана Д'Аламбера (1717—1783) и Жозефа Луи Лагранжа (1736—1813).

Биографы Эйлера, говоря о его математических сочинениях, впервые вводят в дифференциальное и интегральное исчисление понятие «красота».

Д'Аламбер в 26 лет разработал общие правила составления и решения дифференциальных уравнений (в 23 года он уже был избран членом Французской Академии наук).

Жозеф Луи Лагранж — знаменитый французский математик — ввел методы интегрирования дифференциальных уравнений.

Портреты этих ученых приведены на советской и французских марках.

На советской марке Л. Эйлер изображен на фоне Петербургской и Берлинской Академий наук, членом которых он являлся.

А. В. Алтыкис

ИНДЕКС 70465

К нашим читателям

Продолжается подписка на научно-популярный физико-математический журнал «Квант» на 1974 год.

Основное содержание журнала — материалы, помогающие лучше понять физику и математику, научиться применять эти науки для объяснения различных явлений и процессов, с которыми мы сталкиваемся на практике, научиться решать задачи.

В журнале читатель найдет много задач. Среди них задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в различные вузы, олимпиадные и просто интересные задачи.

Заметки с описанием физических приборов помогут читателю поставить и провести физический эксперимент.

Журнал публикует статьи обзорного характера, рассказывающие о достижениях науки, о проблемах, которые еще ждут своего решения; рассказы об ученых, о том, как рождаются научные открытия.

В журнале постоянно помещаются рецензии на книги — уже вышедшие и еще только готовящиеся к изданию.

Журнал рассчитан в первую очередь на учеников 7—10 классов, но начиная с 1974 года, будут помещаться материалы, рассчитанные на школьников 5—6 классов. Он полезен учителям, особенно тем, кто руководит кружками или ведет факультативные занятия по физике и математике, а также всем, кто любит математику и физику.

Журнал распространяется только по подписке, которая производится без ограничений.

Цена номера 30 коп., стоимость годовой подписки 3 руб. 60 коп. При подписке ссылайтесь на наш индекс 70465.